UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
EXAMEN # 1 (FORMA REMOTA). B
FECHA: VIERNES 22 DE ENERO DE 2021.
HORA 17:30. HORA DE ENTREGA: 19:00 A 19:30

Nombre: ____

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(20 puntos)** ¿De cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales es solución la siguiente función? (Nota: puede ser más de una ecuación.) $\varphi(t) = t \ln t$.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+t}{t}$.

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$.

(c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t \ln t} + \ln t$.

(2) **(20 puntos)**

(a) Escriba el esquema de Euler para el problema de valores iniciales siguiente, con paso arbitrario Δt,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \cos(ty); \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

(b) Si $\Delta t = 1/10$, calcule los primeros valores aproximados para $y(1/10), y(2/10), y(3/10)$.

(3) **(20 puntos)** Dibuje la línea fase y bosqueje algunas soluciones representativas de la siguiente ecuación diferencial. También clasifique los puntos fijos geométricamente y usando el teorema de linealización. $\dfrac{dy}{dt} = -y^3 + 2y^2 + 3y$.

(4) **(20 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial: $2\dfrac{dy}{dt} + 10y = 14t - 4$, usando

(a) el método de coeficientes indeterminados.

(b) el método de factor integrante.

(5) **(20 puntos)** Usando la definición, calcule la derivada de la siguiente función en el punto $x = 4$.

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

UAM - AZCAPOTZALCO. $\boxed{\text{Ecuaciones Diferenciales Ordinarias}}$

Examen 1-A Soluciones (Tipo B) Lunes 18 de enero 2021

---

(1) We have the function $\varphi(t) = t \ln t$, whose derivative is $\varphi'(t) = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1$

The right-hand-sides of the equations are:

(a) $\frac{\varphi + t}{t} = \frac{t \ln t + t}{t} = \ln t + 1$, ✓ It is sol'n!

(b) $\frac{1}{t} \neq \ln t + 1$. It is not sol'n

(c) $\frac{\varphi}{t \ln t} + \ln t = \frac{t \ln t}{t \ln t} + \ln t = 1 + \ln t$ ✓ It is solution!

Then $\varphi(t)$ is solution to eq's (a) and (c).

Moraleja: A function can be solution of many Diff Eq's.

---

(2) (a) The time step Δt allows to compute the time points t_k:

$$t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

(or $t_{k+1} = t_k + \Delta t$) where $N \in \mathbb{N}$ (Natural numbers)

there $t_0 = 0$.

The Euler's method, to approximate $y(t_k)$ is:

-1-

$$y_{k+1} = f(t_k, y_k)\,\Delta t + y_k\,, \quad k=0,1,2,\dots,N.$$

$$y_0 = y(t_0).$$

from the the I.V.P.

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)\,, \quad y(t_0) = y_0$$

Then, the Euler's scheme is:

$$\boxed{y_{k+1} = \cos(t_k y_k)\Delta t + y_k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ t_k &= k\Delta t \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} t_0 &= 0 \\ k &= 0,1,2,\dots N \end{aligned}$$

(b) For $\Delta t = 1/10$,

$$t_1 = \frac{1}{10}\,,\ t_2 = \frac{2}{10}\,,\ t_3 = \frac{3}{10}.$$

$$y_1 = \cos(t_0 y_0)\,\Delta t + y_0 = \cos(0)\frac{1}{10} + 1 = \underline{1.1.}$$

$$y_2 = \cos(t_1 y_1)\,\Delta t + y_1 = \cos\left(\frac{1.1}{10}\right)\frac{1}{10} + 1.1 = \underline{1.1995\dots}$$

$$y_3 = \cos(t_2 y_2)\Delta t + y_2 = \cos\left(\frac{1.1995}{10}\right)\frac{1}{10} + 1.1995 =$$

$$= \underline{1.2987\dots}$$

3) The Diff. Eq'n $\frac{dy}{dt} = -y^3+2y^2+3y$ has stationary solutions (since it is autonomous), which satisfy the algebraic eq'n: $-y^3+2y^2+3y=0$

i.e. $-y(y^2-2y-3)=0$

$-y(y+1)(y-3)=0$

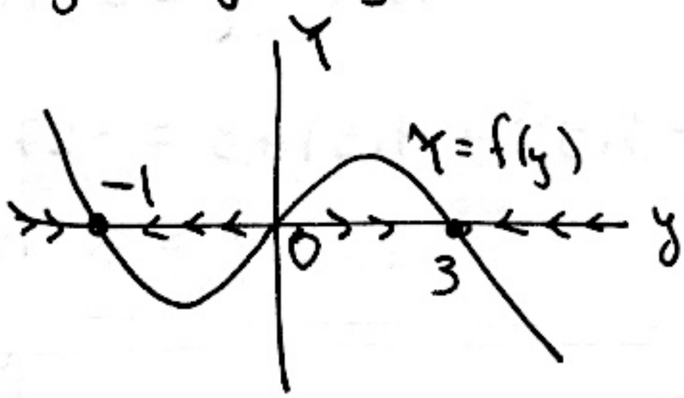
Stationary solns.

$y_1(t) = -1 = y_1$

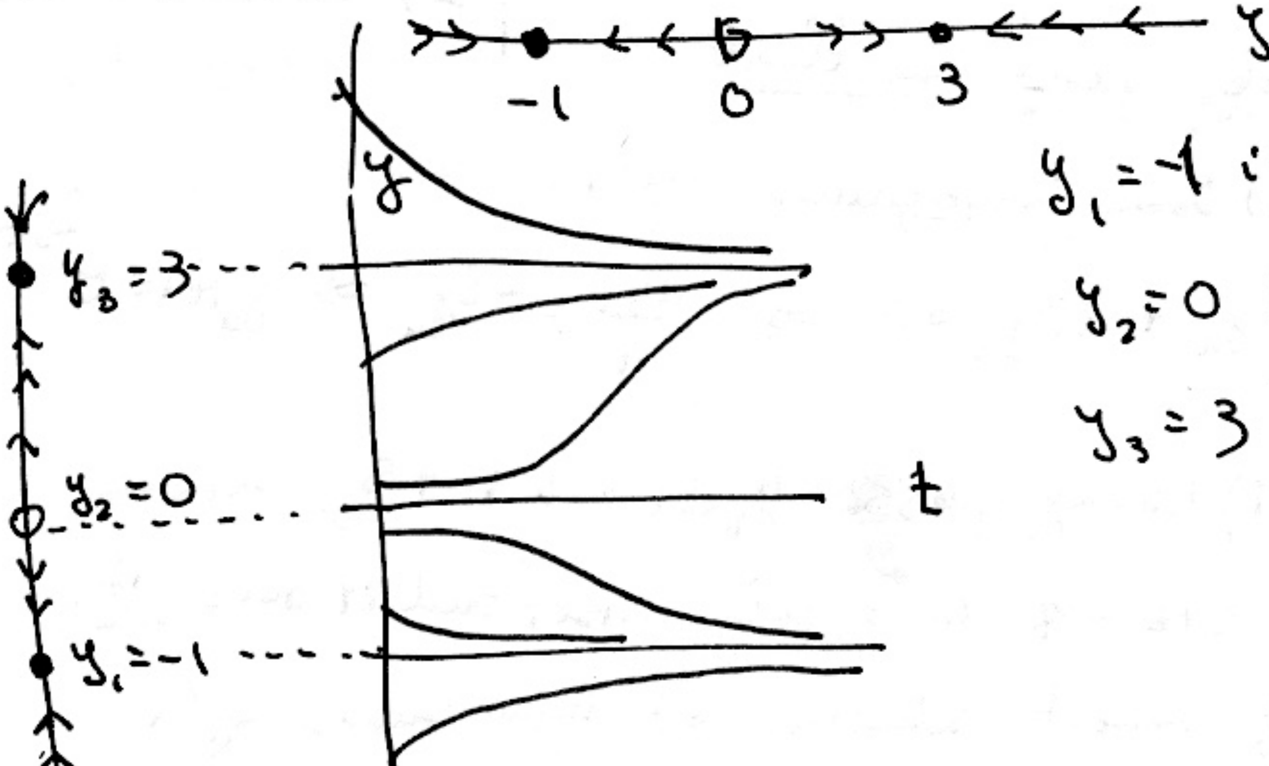
$y_2(t) = 0 = y_2$

$y_3(t) = 3 = y_3$

The graph of $f(y) = -y^3+2y^2+3y$ looks like:



The phase line is



$y_1 = -1$ is a sink

$y_2 = 0$ is a source

$y_3 = 3$ is a sink

According with the Linearization theorem, we require:

$f'(y) = \frac{df}{dy} = -3y^2 + 4y + 3$

$f'(y_1) = -3(-1)^2 + 4(-1) + 3 = -3 - 4 + 3 = -4 < 0$

then $y_1 = -1$ is a sink.

$f'(y_2) = -3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$

then $y_2 = 0$ is a source

$f'(y_3) = -3(3)^2 + 4(3) + 3 = -27 + 12 + 3 = -12 < 0$

then $y_3 = 3$ is sink

---

(4) $2\frac{dy}{dt} + 10y = 14t - 4$

1) Linear equation
2) Constant coeff's

(a) Lucky guess method

(i) Solve homogeneous eq'n.

$2\frac{d}{dt}y_h + 10y_h = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{dt} = -5y_h \Rightarrow y_h(t) = e^{-5t}$.

(ii) Lucky guess: $y_p(t) = \alpha t + \beta$, since $b(t) = 14t - 4$ is a polynomial; and it does not not repeat solutions of homogeneous eq'n

$$2\frac{dy_p}{dt} + 10y_p = 14t - 4.$$

$$2\alpha + 10(\alpha t + \beta) = 14t - 4.$$

$$10\alpha t + (2\alpha + 10\beta) = 14t - 4.$$

$$\Rightarrow 10\alpha = 14 \Rightarrow \alpha = 14/10$$

$$2\alpha + 10\beta = -4 \Rightarrow \frac{28}{10} + 10\beta = -4$$

$$\Rightarrow 10\beta = -4 - \frac{28}{10} = \frac{-40-28}{10} = \frac{-68}{10} \rightarrow \beta = \frac{-68}{100}$$

Then: $y_p(t) = \frac{14}{10}t - \frac{68}{100}$

By the Principles of Linearity $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = Ce^{-5t} + \left(\frac{14}{10}t - \frac{68}{100}\right)}$

(b) Integrating factor method. We should write the Diff Eq. to the standard form: $1 \cdot \frac{dy}{dt} + 5y = 7t - 2.$

Integrating factor $\mu(t) = e^{\int 5\,dt} = e^{5t}.$

(It coincides with $y_h(t) = (\mu(t))^{-1} = (e^{5t})^{-1} = e^{-5t}$ ✓)

We can use the formula:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int b(t)\,\mu(t)\,dt + \frac{C}{\mu(t)}.$$

Compute the Integral:

$$\int b(t)\mu(t)\,dt = \int (7t-2)e^{5t}\,dt = 7\int te^{5t}\,dt - 2\int e^{5t}\,dt$$

$$= 7\left[\frac{te^{5t}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5t}\,dt\right] - 2\,\frac{e^{5t}}{5}.$$

$$= 7\left[\frac{te^{5t}}{5} - \frac{1}{25}e^{5t}\right] - \frac{2}{5}e^{5t}.$$

$$= \left(\frac{7}{5}t + \frac{(-7)-10}{25}\right)e^{5t} = \left(\frac{7t}{5} - \frac{17}{25}\right)e^{5t}$$

Hence

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int b(t)\mu(t)\,dt + \frac{C}{\mu(t)}$$

$$= \frac{1}{e^{5t}}\left(\frac{7t}{5} - \frac{17}{25}\right)e^{5t} + \frac{C}{e^{5t}}$$

i.e.

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{7}{5}t - \frac{17}{25}\right) + Ce^{-5t}}$$

which coincides with the previous solution.

$$\frac{14}{10}t - \frac{68}{100} = \frac{7}{5}t - \frac{34}{50} = \frac{7}{5}t - \frac{17}{25} \checkmark.$$

This is a present from Differential Calculus,
but we all now see this definition is
fundamental in Science and Engineering.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h}\frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

At $x = 4$: $\boxed{\left.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right|_{x=4} = \frac{1}{4}}$