UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

EXAMEN # 1-B (FORMA REMOTA). Tipo a

FECHA: VIERNES 5 DE FEBRERO DE 2021.

HORA 17:30. HORA DE ENTREGA: 19:00 A 19:30

Nombre: ANSWER KEY

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 25 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(25 puntos)** Considere que tiene un material que contiene el isótopo de Torio-234, el cual es radioactivo. Originalmente, dicho material tiene 100 mg de Torio y en una semana decae para obtener una masa de 82.94 mg.

  (a) Encuentre la tasa de decaimiento.
  (b) Encuentre la masa del Torio después de t semanas.
  (c) Si M_0 mg es la masa inicial de Torio, encuentre la vida media del Torio. Es decir, encuentre el tiempo necesario para tener $M_0/2$ mg.

(2) **(25 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\left(1+\frac{y}{2x(1+x^2y^2)}\right)+\left(\frac{1}{2(1+x^2y^2)}-\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

(3) **(25 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$-t\,dx + x\,\cancel{dx} = -\sqrt{tx}\,dt.$$

dt

(4) **(25 puntos)** Después de la pandemia, usted está bien contento porque regresó a clases presenciales en la UAM. Como está bien contento, se va a **La Frontera** para festejar con sus cuates. Le sirven una cerveza bien fría y, como venía de un laboratorio, se trajo "accidentalmente" un termómetro, le mide la temperatura: -2^o (menos 2) grados Celcius. Después de 5 minutos de plática, vuelve a medir la temperatura: 1^o grado Celcius. Luego se va a bailar por 15 minutos. Regresa. ¿Se tomaría la cerveza? ¿A qué temperatura está? Suponga que es verano y hace un calor del demonio de 32 grados Celcius.

Examen # 1-B (Tipo a) ANSWER KEY

(1) The equation for the radioactive decay is

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ \; ; \quad \begin{array}{l} r - \text{rate of decay} > 0 \\ Q = Q(t) - \text{Amount of radioactive substance} \\ \quad \text{at time } t, \text{ in mg.} \end{array}$$

The solution is:

$$Q(t) = Q(0)\, e^{-rt}.$$

(a) We know $Q(0) = 100$ mg

$$Q(1) = 82.94 \text{ mg} \Rightarrow 82.94 = 100\, e^{-r}$$

$$\Rightarrow e^{r} = \frac{100}{82.94} \Rightarrow r = \log\left(\frac{100}{82.94}\right) \Rightarrow \boxed{r \approx \frac{0.187053}{\text{week}}}$$

(b) $\boxed{Q(t) = 100\, e^{-(0.187053)t} \text{ mg}}$ Observe $e^{-r} = 0.8294$

$$\Rightarrow e^{-rt} = (0.8294)^{t} \Rightarrow \boxed{Q(t) = 100(0.8294)^{t} \text{ mg}}$$

(c) We want T s.t. $Q(T) = \frac{Q(0)}{2} \Rightarrow e^{-rT} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow rT = \log 2 \Rightarrow T = \frac{\log(2)}{r} \Rightarrow T \approx \frac{\log 2}{0.187053} \text{ weeks}$$

$$\boxed{T \approx 3.7056 \text{ weeks}}$$

ie $\boxed{T \approx 3 \text{ weeks} + 5 \text{ days}}$

$$② \underbrace{\left(1+\frac{y}{2x(1+x^2y^2)}\right)}_{M(x,y)}+\underbrace{\left(\frac{1}{2(1+x^2y^2)}-\frac{y}{x}\right)}_{N(x,y).}\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{y}{2x(1+x^2y^2)}\right)=0+\frac{2x(1+x^2y^2)\cdot 1-y(4x^3y)}{[2x(1+x^2y^2)]^2}$$

$$=\frac{2x[1+x^2y^2-2x^2y^2]}{[2x(1+x^2y^2)]^2}=\frac{1-x^2y^2}{2x(1+x^2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2(1+x^2y^2)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{-(2xy^2)}{2(1+x^2y^2)^2}+\frac{y}{x^2}\quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}}$$

$$=\frac{-2x^3y\qquad(1+x^2y^2)}{2(1+x^2y^2)}$$

They are not equal. Therefore the Diff Eq is **NOT** exact

Now

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1-x^2y^2}{2x(1+x^2y^2)^2}+\frac{2xy^2}{2(1+x^2y^2)^2}-\frac{y}{x^2}$$

$$=\frac{1-x^2y^2+2x^2y^2}{2x(1+x^2y^2)^2}-\frac{y}{x^2}$$

$$=\frac{1+x^2y^2}{2x(1+x^2y^2)^2}-\frac{y}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2x(1+x^2y^2)^2}-\frac{y}{x^2}$$

$$=\frac{x-2y(1+x^2y^2)}{2x^2(1+x^2y^2)^2}$$

0502052021

New: $N(x,y) = \dfrac{x - 2y(1+x^2y^2)}{2x(1+x^2y^2)}$

Then:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\cancel{(x-2y(1+x^2y^2))}}{2x^2(1+x^2y^2)} \cdot \frac{2x(1+x^2y^2)}{\cancel{(x-2y(1+x^2y^2))}}$$

$$= \frac{2x(1+x^2y^2)}{2x^2(1+x^2y^2)} = \frac{1}{x} \quad \text{depends only on } x.$$

Then $\mu = \mu(x)$ and $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\log \mu) = \dfrac{d}{dx}(\log x)$

$\Rightarrow \mu(x) = x$ is the integrating factor. The new eq'n is

$$\left(x + \frac{y}{2(1+x^2y^2)}\right) + \left(\frac{x}{2(1+x^2y^2)} - y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

If you multiply by 2, you get Problem 19, Sect. 2.4 (NSS)

$$\underbrace{\left(2x + \frac{y}{(1+x^2y^2)}\right)}_{M_{new}} + \underbrace{\left(\frac{x}{(1+x^2y^2)} - 2y\right)}_{N_{new}}\frac{dy}{dx} = 0,$$

which is <u>exact</u>. Let us verify:

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_{new}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + \frac{y}{1+x^2y^2}\right) = 0 + \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2y^2 - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(N_{new}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(1+x^2y^2)} - 2y\right) = \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} - 0$$

$$= \frac{1+x^2y^2 - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{new}}{\partial y} = \frac{\partial N_{new}}{\partial x}}$$

Exact

Then there exists $F(x,y) = C$ such that.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \overset{= M_{new}(x,y)}{=} 2x + \frac{y}{(1+x^2y^2)} \Rightarrow F(x,y) = x^2 + \int \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx$$

$u = xy$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^2 + \int \frac{1}{1+u^2}\,du = x^2 + \arctan(u) + g(y)$$

i.e.

$$F(x,y) = x^2 + \arctan(xy) + g(y).$$

Then $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x}{1+(xy)^2} + g'(y).$

Comparing with $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N_{new} = \dfrac{x}{1+x^2y^2} - 2y).$

Then $g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2.$

Therefore: $F(x,y) = x^2 + \arctan(xy) - y^2$

$\Rightarrow$ The solution is

$$\boxed{x^2 - y^2 + \arctan(xy) = C}$$

This is the implicit solution, and must be solved for $y = y(x)$

05 02 08 2021.

(3) $-t\,dx + x\,dt + = -\sqrt{tx}\,dt.$

This is equivalent to:

$$t\frac{dx}{dt} - x = \sqrt{tx}$$

i.e. $$\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t}x = \frac{1}{\sqrt{t}}x^{1/2}$$, which is of the Bernoulli type

Here $n = \frac{1}{2}$ $$v(t) = x^{1-n} = x^{1-1/2} = x^{1/2}$$

Then $$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\left(\frac{1}{t}x + \frac{1}{\sqrt{t}}x^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2t}x^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t}v + \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2t}v = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{-1}{2t}dt\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\log|t|\right) = |t|^{-1/2}$$

Now $$\int \mu(t)b(t)\,dt = \int t^{-1/2}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log|t|.$$

$$\frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)b(t)\,dt = \frac{1}{t^{-1/2}}\frac{1}{2}\log|t| = \frac{\sqrt{t}}{2}\log|t|.$$

Then $$v(t) = \frac{\sqrt{t}}{2}\log|t| + \frac{c}{t^{-1/2}} = \sqrt{t}\left(\log|t|^{1/2} + c\right)$$

Now $$\boxed{x(t) = v^2(t) = t\left(\log|t|^{1/2} + c\right)^2}$$

$(v = x^{1/2})$

(3) Write the equation as: $-t + x\frac{dt}{dx}$

$$-t\frac{dx}{dt} + x = -\sqrt{tx}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\sqrt{tx} + x)}_{M(t,x)} \underbrace{- t}_{N(t,x)} \frac{dx}{dt} = 0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{x}} + 1 \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -1 \quad \text{Not } \underline{\text{exact}} \text{ Diff Eq}^{n}.$$

But

$$M_x - N_t = \left(\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{x}} + 1\right) + 1 = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{x}} + 2 = \frac{\sqrt{t} + 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Now

$$\frac{M_x - N_t}{N} = \frac{\sqrt{t} + 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{-t}\right) \quad \text{not a function of } t \text{ only } \mu \neq \mu(t)$$

$$\frac{N_t - M_x}{M} = -\frac{\sqrt{t} + 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{tx} + x}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{tx} + 4x}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{tx} + x}\right)$$

Not a function of x only. $\Rightarrow \mu \neq \mu(x)$.

Then it cannot be solved by this type of integrating factors.

05020S2021

(4) Newton's Law of Cooling $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$. $[t]$ = minutes.

Here, $T_a = 32°C$. and the solution to the eq'n is:

$$T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a.$$

Since $T(0) = -2$, Then $T(t) = -34e^{-kt} + 32$, °C

Now, $1 = T(5) = -34e^{-5k} + 32$.

From this we get k: $34e^{-5k} = 31 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{31}{34}$

$\Rightarrow 5k = \log\left(\frac{34}{31}\right) \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{5}\log\frac{34}{31}\ \frac{1}{min}}$

or $\boxed{k \approx 0.0184746\ \frac{1}{min}}$ Observe $e^{-k} = \left(\frac{31}{34}\right)^{1/5}$

Then: $\boxed{T(t) \approx \left(-34e^{-(0.0184746)t} + 32\right)°C}$ (This is approx.)

After 15 more minutes, $t = 20$:

$\Rightarrow T(20) \approx -34e^{-(0.0184746)20} + 32$, °C

$\boxed{T(20) \approx 8.503°C}$ This is approx.

Also: $(e^{-k})^t = \left(\frac{31}{34}\right)^{t/5} \Rightarrow \boxed{T(t) = -34\left(\frac{31}{34}\right)^{t/5} + 32°C}$

$$T(20) = -34\left(\frac{31}{34}\right)^{20/5} + 32 = -(34)^{-3}(31)^4 + 32$$

ie $\boxed{T(20) = 8.5031°C}$