UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
EXAMEN # 1-B (FORMA REMOTA). — Tipo b
FECHA: VIERNES 5 DE FEBRERO DE 2021.
HORA 17:30. HORA DE ENTREGA: 19:00 A 19:30

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 25 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen **es INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(25 puntos)** El modelo logístico se usa para calcular la biomasa de cierto pez endémico en en lago Titicaca en Perú. La función $y(t)$ indica la biomasa al tiempo t. Los parámetros de la ecuación se estimaron y se encontró que la tasa de crecimiento es de 0.35/año y la población de saturación es de 40.2×10^3 kg. Si la masa inicial es un cuarto de la masa de saturación, encuentre la biomasa 2 años después. Encuentre también en qué instante la biomasa será tres cuartos de la población de saturación.

(2) **(25 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{t}{2x+2t^2x^3}-1\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{t}{x}+\frac{1}{2+2t^2x^2}\right)=0.$$

(3) **(25 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$2\theta r\, dr+(\theta^2-r^2)d\theta=0.$$

(4) **(25 puntos)** Después de la pandemia, usted está bien contento porque regresó a clases presenciales en la UAM. Como está bien contento, se va a **La Frontera** para festejar con sus cuates. Le sirven una cerveza bien fría y, después de 5 minutos, como venía de un laboratorio y se trajo "accidentalmente" un termómetro, le mide la temperatura: 1er grado Celcius. Luego se va a bailar por 15 minutos. Regresa y le toma la temperatura: 10^{o} Celcius. ¿A qué temperatura estaba su cerveza cuando se la sirvieron? Suponga que es verano y hace un calor del demonio de 32 grados Celcius.

UAM-Azcapotzalco $\boxed{\text{EDOs}}$ Viernes, 5 de febrero 2021

Examen # 1-B (Tipo b) ANSWER KEY

① We know that the logistic eq'n is

$$\frac{dP}{dt} = -r\left(1-\frac{P}{K}\right)P, \qquad r = 0.35\ 1/\text{año}, \quad K = 40.2\times10^3\,\text{kg}.$$

with solution.

with IC.

$$\boxed{P(0) = P_0 = \frac{K}{4} = 10.05\times10^3\,\text{kg}}$$

$$P(t) = \frac{K P(0)}{(K-P(0))e^{-rt} + P(0)}$$

Now $P(0) = K/4 \Rightarrow K = 4P(0)$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{4P^2(0)}{(4-1)P(0)e^{-rt} + P(0)} = \frac{4(P(0))}{3e^{-rt}+1}.$$

Then: $\boxed{P(t) = \dfrac{40.2\times10^3}{3e^{-rt}+1}}$

$$P(2) = \frac{40.2\times10^3}{3e^{-2(0.35)}+1} = 16.14616\times10^3\ \text{kg}.$$

Find T s.t. $P(T) = \frac{3}{4}K \Rightarrow \frac{3}{4}K = \frac{KP(0)}{(K-P(0))e^{-rT}+P(0)}$

$$\Rightarrow \left((K-P(0))e^{-rT} + P(0)\right)\frac{3}{4} = P(0) \Rightarrow \frac{3}{4}(K-P(0))e^{-rT} = \frac{1}{4}P(0)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{rT}}{K-P(0)} = \frac{3}{P(0)} \Rightarrow e^{rT} = 3\left(\frac{K}{P(0)}-1\right) = 3(4-1) = 9$$

$$\Rightarrow rT = \log 9 \Rightarrow T = \frac{\log 9}{0.35} \Rightarrow \boxed{T \approx 6.277\ \text{years}}$$

$= 6$ years $+ 101.4$ days.

(2) $\underbrace{\left(\frac{t}{x} + \frac{1}{2(1+t^2x^2)}\right)}_{M(t,x)} + \underbrace{\left(\frac{t}{2x(1+t^2x^2)} - 1\right)}_{N(t,x)}\frac{dx}{dt} = 0$

Where $x = x(t)$.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x} + \frac{1}{2(1+t^2x^2)}\right) = -\left(\frac{t}{x^2} + \frac{2t^2x}{2(1+t^2x^2)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{2t(1+t^2x^2)^2 + 2t^2x^2}{2x^2(1+t^2x^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2x(1+t^2x^2)} - 1\right) = \frac{1}{2x(1+t^2x^2)} - \frac{2t^2x^2}{2x(1+t^2x^2)^2} + 0$$

$$= \frac{1+t^2x^2 - 2t^2x^2}{2x(1+t^2x^2)^2} = \frac{1-t^2x^2}{2x(1+t^2x^2)^2}.$$

$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow$ The Diff. Eq is <u>NOT</u> exact.

Now:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = -\left[\frac{t}{x^2} + \frac{2t^2x}{2(1+t^2x^2)^2} + \frac{1-t^2x^2}{2x(1+t^2x^2)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{t}{x^2} + \frac{2t^2x^2 + 1 - t^2x^2}{2x(1+t^2x^2)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{t}{x^2} + \frac{t^2x^2+1}{2x(1+t^2x^2)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{t}{x^2} + \frac{1}{2x(1+t^2x^2)^2}\right]$$

$$= -\left(\frac{2t(1+t^2x^2)^2 + x}{2x^2(1+t^2x^2)}\right)$$

= 2 =

And $N(t,x) = \dfrac{t}{2x(1+x^2t^2)} - 1 = \dfrac{t-2x(1+x^2t^2)}{2x(1+x^2t^2)}$. 05020520211

Then

$$\frac{M_x - N_t}{N} = -\left(\frac{2t(1+t^2x^2)^2+x}{2x^2(1+t^2x^2)}\right)\cdot\frac{2x(1+x^2t^2)}{t-2x(1+x^2t^2)}$$

$$= -\frac{2t(1+t^2x^2)^2+x}{x(t-2x(1+x^2t^2))} \quad \text{does \underline{not} work:}$$

Now:

$$M(t,x) = \frac{t}{x} + \frac{1}{2(1+t^2x^2)} = \frac{2t(1+t^2x^2)+x}{2x(1+t^2x^2)}$$

Then:

$$\frac{N_t - M_x}{MN} = \left(\frac{2t(1+t^2x^2)+x}{2x^2(1+t^2x^2)}\right)\cdot\left(\frac{2x(1+t^2x^2)}{2t(1+t^2x^2)+x}\right)$$

$$= \frac{2x(1+t^2x^2)}{2x^2(1+t^2x^2)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu = \mu(x) \text{ only}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log|\mu|) = \frac{d}{dx}(\log|x|) \Rightarrow \boxed{\mu(x) = x}$$

Multiply eq'n by $\mu(x) = x$, or better by $2\mu(x) = 2x$, to get:

$$\underbrace{\left(2t + \frac{x}{(1+t^2x^2)}\right)}_{M_{new}} + \underbrace{\left(\frac{t}{(1+t^2x^2)} - 2x\right)}_{N_{new}}\frac{dx}{dt} = 0.$$

and we get Problem 19, Sect. 2.4 (NSS) with $x \longrightarrow t$, $y \longrightarrow x$.

$$\frac{\partial M_{new}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2t + \frac{x}{(1+t^2x^2)}\right) = 0 + \frac{1}{1+t^2x^2} - \frac{2t^2x^2}{(1+t^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1+t^2x^2-2t^2x^2}{(1+t^2x^2)^2} = \frac{1-t^2x^2}{(1+t^2x^2)^2}$$

$$\frac{\partial N_{new}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{1+x^2t^2} - 2x\right) = \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{2x^2t^2}{(1+x^2t^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2t^2 - 2x^2t^2}{(1+x^2t^2)^2} = \frac{1-x^2t^2}{(1+x^2t^2)^2}$$

$\frac{\partial M_{new}}{\partial x} = \frac{\partial N_{new}}{\partial t} \Rightarrow$ The Diff Eq is exact!.

Then, there is $F(t,x) = C_1$ such that

$\frac{\partial F}{\partial t} = M_{new} = 2t + \frac{x}{1+x^2t^2} \Rightarrow F(t,x) = t^2 + \int \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$

$$\Rightarrow F(t,x) \underset{u=xt}{=} t^2 + \int \frac{1}{1+u^2}\,du = t^2 + \operatorname{Arctan} u + C_1 + g(x)$$

$$= t^2 + \operatorname{Arctan}(xt) + C_1 + g(x)$$

Now $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{t}{1+x^2t^2} + g'(x)$

Comparing with $\frac{\partial F}{\partial x} = N_{new} = \frac{t}{1+x^2t^2} - 2x$

$\Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g(x) = -x^2$. So that.

$F(x,t) = t^2 + \operatorname{Arctan}(tx) + (-x^2) + C_1$.

The solution $F(t,x) = C$ becomes

$$\boxed{t^2 - x^2 + \operatorname{Arctan}(tx) = C}$$

and this is implicit (It cannot be solved for $x = x(t)$).

(3) $2\theta r\, dr + (\theta^2 - r^2)\, d\theta = 0$

Assume $r = r(\theta)$. Then.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2-\theta^2}{2\theta r} = \frac{r}{2\theta} - \frac{\theta}{2r}$$

ie. $\frac{dr}{d\theta} - \frac{1}{2\theta} r = -\frac{\theta}{2} r^{-1}$. Bernoulli eq'n

$n = -1. \Rightarrow v = r^{1-n} = r^2$

$$\Rightarrow \frac{dv}{d\theta} = 2r\frac{dr}{d\theta} = 2r\left(\frac{r^2-\theta^2}{2\theta r}\right) = \frac{r^2-\theta^2}{\theta} = \frac{v}{\theta} - \theta$$

$\Rightarrow$ Solve the Diff Eq: $\frac{dv}{d\theta} - \frac{v}{\theta} = -\theta$

$$\mu = e^{\left(\int -\frac{1}{\theta} d\theta\right)} = e^{-\log(|\theta|)} = e^{\log(|\theta|^{-1})} = \frac{1}{\theta}.$$

$\Rightarrow$ Multiply by $\frac{1}{\theta}$: $\frac{1}{\theta}\frac{dv}{d\theta} - \frac{1}{\theta^2} v = -1$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\theta} v\right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{\theta} v(\theta) = -\theta + C.$

$\Rightarrow v(\theta) = -\theta^2 + C\theta$

$r(\theta) = \sqrt{v(\theta)} \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \sqrt{C\theta - \theta^2}}$

ie $r^2 + \theta^2 = C\theta$

It also works with integrating factors.

$$\underbrace{2\theta r}_{M(r,\theta)} + \underbrace{(\theta^2 - r^2)}_{N(r,\theta)} \frac{d\theta}{dr} = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial \theta} = 2r$, $\frac{\partial N}{\partial r} = -2r$ Not exact ☹.

$\frac{M_\theta - N_r}{N} = \frac{4r}{\theta^2 - r^2}$ Not a function of r only.

$\frac{N_r - M_\theta}{M} = -\frac{4r}{2\theta r} = -\frac{2}{\theta}$ a function of θ only!

$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{2}{\theta} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\log \mu) = -2 \frac{d}{d\theta}(\log \theta)$

$\Rightarrow \mu = \theta^{-2}$. Multiply by θ^{-2}:

$\frac{2r}{\theta} + \left(1 - \frac{r^2}{\theta^2}\right)\frac{d\theta}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{2r}{\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(r,\theta) = \frac{r^2}{\theta} + f(\theta)$. Then $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{r^2}{\theta^2} + f'(\theta)$

and comparing with $N_{new}(r,\theta) = \left(1 - \frac{r^2}{\theta^2}\right) \Rightarrow f'(\theta) = 1$

$\Rightarrow f(\theta) = \theta + C_1 \Rightarrow F(r,\theta) = \frac{r^2}{\theta} + \theta + C_1$

The implicit solution $F(r,\theta) = C$

$$\boxed{\frac{r^2}{\theta} + \theta = C} \Rightarrow \boxed{r^2 + \theta^2 = C\theta}$$ Same solution!

(4) We have to solve Newton's Law of cooling 05052021.

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ with $T(0) = 1°C$, $T_a = 32°C$.

We have to find $T(-5)$, where $[t] =$ minutes.

The solution to the ~~Diff~~ Eq'n.

$$T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a$$

ie $T(t) = -31e^{-kt} + 32$.

We also know: $T(15) = 10°C$:

$$\Rightarrow 10°C = -31e^{-15k} + 32 \Rightarrow 31e^{-15k} = 22$$

$$\Rightarrow e^{-15k} = \frac{22}{31} \Rightarrow e^{15k} = \frac{31}{22} \Rightarrow k = \frac{1}{15}\log\left(\frac{31}{22}\right)\frac{1}{min}$$

$$\Rightarrow \boxed{k \approx 0.22863 \ \frac{1}{min}} \quad \boxed{T(t) \approx -31e^{-(0.22)t} + 32°C}$$

Observe that $e^{-k} = \left(\frac{22}{31}\right)^{1/15} \Rightarrow e^{-kt} = \left(\frac{22}{31}\right)^{t/15}$

Then $T(t) \approx -31\left(\frac{22}{31}\right)^{t/15} + 32$ °C

We want 5 minutes <u>before</u> we measure T for the first time: $T(-5) \approx -31e^{-(0.022863)(-5)} + 32$

$$\boxed{T(-5) \approx -2.75°C}$$