UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.

2 CÁLCULO INTEGRAL

EXAMEN # 2 (FORMA REMOTA). — Tipo A

FECHA: LUNES 15 DE ENERO DE 2021.

HORA 16:00. HORA DE ENTREGA: 17:30 A 18:00

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CINCO** problemas con diferentes puntajes.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(25 puntos)** Calcule la integral

$$\int \cot^5(2x)\sin^4(2x)\,dx$$

(2) **(25 puntos)** Calcule la integral

$$\int \frac{5(\sqrt{x^2-25})^{-1}}{x^3}\,dx$$

(3) **(15 puntos)** Encuentre la forma de las fraciones parciales de las siguientes funciones racionales. No encuentre los coeficientes, solamente de la forma.

$$\frac{x^4+x^2}{(x^2-x)(x^4+4x^2+4)}$$

(4) **(10 puntos)** Calcule la integral.

$$\int \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}\,dx$$

(5) **(25 puntos)** Calcule la integral:

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(x+3)^{3/2}}\,dx.$$

UAM - AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | Martes, Febrero 16, 2021

Examen #2 · Tipo (A). ANSWER KEY

(1) $\int \cot^5(2x)\sin^4(2x)\,dx = \int \frac{\cos^5(2x)}{\sin^5(2x)}\sin^4(2x)\,dx =$

$= \int \frac{\cos^4(2x)}{\sin(2x)}\cos(2x)\,dx = \int \frac{(1-\sin^2(2x))^2}{\sin(2x)}\cos(2x)\,dx$

Let $u = \sin(2x) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \cos(2x)$. thus

$= \frac{1}{2}\int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1-2u^2+u^4}{u}\,du =$

$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)du = \frac{1}{2}\left(\log|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) + C$

$$\Rightarrow \boxed{\int \cot^5(2x)\sin^4(2x)\,dx = \frac{1}{2}\log|\sin(2x)| - \sin^2(2x) + \frac{1}{4}\sin^4(2x) + C}$$

(2) $\int \frac{5\left(\sqrt{x^2-25}\right)^{-1}}{x^3}\,dx = \int \frac{5}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx.$

For integrands of the form x^5-25, use:

$$x(\theta) = 5\sec\theta, \quad \text{for } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

then $x^2-25 = 25\left(\sec^2\theta - 1\right) = 25\tan^2\theta.$

and $\frac{dx}{d\theta} = 5\sec\theta\tan\theta$

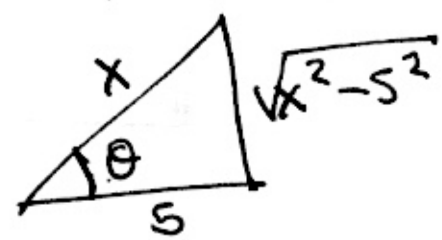
$$= \int \frac{5}{5^3\sec^3\theta\,(5\tan\theta)} \cdot 5\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5^2}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{5^2}\int \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{5^2}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{5^2}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2\cdot 5^2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C = \frac{1}{2\cdot 5^2}\left(\theta + \sin\theta\cos\theta\right) + C$$

Now: $x = 5\sec\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{x}$



$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}.$

Then:

$$\boxed{\int \frac{5}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx = \frac{1}{50}\left(\arccos\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{5\sqrt{x^2-5}}{x^2}\right) + C}$$

③ $\dfrac{x^4+x^2}{(x^2-x)(x^4+4x^2+4)}$ in partial fractions (03021Z2021.

(a) Since $4 = \deg(\text{numerator}) < \deg(\text{denominator}) = 6$.

no division is required.

(b) Denominator $= (x^2-x)(x^4+4x^2+4)$

$= x(x-1)(x^2+2)^2$.

Then,

$$\frac{x^4+x^2}{(x^2-x)(x^4+4x^2+4)} = \frac{x^4+x^2}{x(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+x}{(x-1)(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

where B, C, D, E, F are constants to be determined

---

④. We have to find the partial fractions:

$$\frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$$

Then, $5x-1 = A(x+1) + B(2x-1)$.

If $x=-1$ $-5-1 = 0 + B\cdot(-2-1) \Rightarrow \boxed{B=2}$

If $x=\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}-1 = \frac{3}{2}A + 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

Then

$$\int \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}|2x-1| + 2\operatorname{Log}|x+1| + C$$

$$= \operatorname{Log}\left(\sqrt{|2x-1|}\,(x+1)^2\right) + C$$

(5) $$\int_3^\infty \frac{1}{(x+3)^{3/2}}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_3^T \frac{1}{(x+3)^{3/2}}\,dx.$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_3^T (x+3)^{-3/2}\,dx = \lim_{T\to\infty} (-2)(x+3)^{-1/2}\Big|_3^T$$

$$= (-2)\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{T+3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (-2)\left(0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \checkmark$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.

2 CÁLCULO INTEGRAL

EXAMEN # 2 (FORMA REMOTA). — Tipo (B).

FECHA: LUNES 15 DE ENERO DE 2021.

HORA 16:00. HORA DE ENTREGA: 17:30 A 18:00

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CINCO** problemas con diferentes puntajes.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(25 puntos)** Calcule la integral

$$\int \cot(3y)\cos^4(3y)\,dy$$

(2) **(25 puntos)** Calcule la integral

$$\int \frac{2y^{-2}}{\sqrt{y^2-4}}\,dy$$

(3) **(15 puntos)** Encuentre la forma de las fracciones parciales de las siguientes funciones racionales. No encuentre los coeficientes, solamente de la forma.

$$\frac{y^7+y^2}{(y^4-1)(y^4+2y^2+1)}$$

(4) **(10 puntos)** ~~Calcule la derivada de la siguiente función~~: Calcule la integral.

$$\int \frac{5y+1}{(2y+1)(y-1)}\,dy$$

(5) **(25 puntos)** Calcule la integral:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/y}}{y^3}\,dy.$$

UAM - AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | Martes Febrero 16, 2021

Examen #2 Tipo B ANSWER KEY.

(1) $\int \cot(3y)\cos^4(3y)\,dy = \int \frac{\cos(3y)}{\sin(3y)}\cos^4(3y)\,dy$

$= \int \frac{(\cos^2 3y)^2}{\sin 3y}\cos(3y)\,dy = \int \frac{(1-\sin^2 3y)^2}{\sin 3y}\cdot\cos(3y)\,dy$

Let: $u = \sin 3y \Rightarrow \frac{du}{dy} = 3\cos(3y)$

$= \frac{1}{3}\int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1-2u^2+u^4}{u}\,du$

$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)du = \frac{1}{3}\left(\operatorname{Log}|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) + C$

Then:

$$\boxed{\int \cot(3y)\cos^4(3y)\,dy = \frac{1}{3}\left(\log|\sin 3y| - \sin^2(3y) + \frac{1}{4}\sin^4(3y)\right) + C}$$

② $\int \frac{2y^{-2}}{\sqrt{y^2-4}}\,dy = \int \frac{2}{y^2\sqrt{y^2-4}}\,dy.$

Take $y(\theta) = 2\sec\theta$

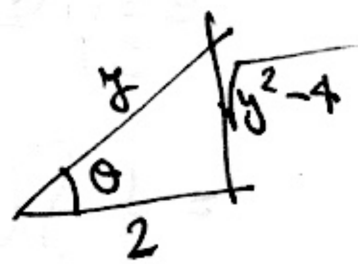
$y^2-4 = 4(\sec^2\theta - 1) = 4\tan^2\theta.$

and $\frac{dy}{d\theta} = 2\sec\theta\tan\theta$:

$$= \int \frac{2}{2^2\sec^2\theta\,(2\tan\theta)}\, 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2^2}{2^3}\int \frac{1}{\sec\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{\sin\theta}{2} + C$$

Now $y = 2\sec\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{y}$



$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{y^2-4}}{y}.$

Then:

$$\boxed{\int \frac{2}{y^2\sqrt{y^2-4}}\, dy = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y^2-4}}{y} + C}$$

(3) Write $\dfrac{y^7+y^2}{(y^4-1)(y^4+2y^2+1)}$ in partial fractions. 05021720 21.

$\deg(\text{numerator}) = 7 < 8 = \deg(\text{denominator})$

Not polynomial division required.

Now:

$\text{denominator} := (y^4-1)(y^4+2y^2+1) = (y^2-1)(y^2+1)((y^2)^2+2y^2+1)$

$= (y-1)(y+1)(y^2+1)(y^2+1)^2$

Then:

$$\boxed{\frac{y^7+y^2}{(y-1)(y+1)(y^2+1)^3} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} + \frac{Cy+D}{y^2+1} + \frac{Ey+F}{(y^2+1)^2} + \frac{Gy+H}{(y^2+1)^3}}$$

(4) Calcular la integral usando fracciones parciales.

$$\frac{5y+1}{(2y+1)(y-1)} = \frac{A}{2y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1)+B(2y+1)}{(2y+1)(y-1)}$$

Then $5y+1 = A(y-1)+B(2y+1)$

If $y=1$: $5+1 = 0+3B \Rightarrow \boxed{B=2}$

If $y=-\frac{1}{2}$: $-\frac{5}{2}+1 = A\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{A=1}$

Then.

$$\int \frac{5y+1}{(2y+1)(y-1)}\,dy = \int \frac{1}{2y+1} + \frac{2}{y-1}\,dy$$

$= 3 =$

$$= \frac{1}{2}\log|2y+1| + 2\log|y-1| + C.$$

Then: $$\boxed{\int \frac{5y+1}{(2y+1)(y-1)}\,dy = \log\left(\sqrt{|2y+1|}\,(y-1)^2\right) + C}$$

o . ——— o ———

⑤ $$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/y}}{y^3}\,dy.$$

Notice that the integrand has a singularity at $y=0$:

Then: $$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/y}}{y^3}\,dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^{1/y}}{y^3}\,dy.$$

Compute: $$u = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^{1/y}}{y}\,\frac{1}{y^2}\,dy = -\int_{-1}^{-1/\epsilon} u e^{u}\,du =$$

$$= -\left[u e^{u}\Big|_{-1}^{-1/\epsilon} - \int_{-1}^{-1/\epsilon} e^{u}\,du \right] =$$

$$= -\left[u e^{u} - e^{u}\right]\Big|_{-1}^{-1/\epsilon} = -(u-1)e^{u}\Big|_{-1}^{-1/\epsilon}$$

$$= +\left(\frac{1}{\epsilon}+1\right)e^{-1/\epsilon} - 2e^{-1} = \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)e^{-1/\epsilon} - 2e^{-1}$$

Then:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/y}}{y^3}\,dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)e^{-1/\epsilon} - 2e^{-1}$$

Using the change of variable $T = \frac{1}{G}$

$$= \lim_{T \to \infty} (1 + T) e^{-T} - 2e^{-1}.$$

Now: $\lim_{T \to \infty} e^{-T} = 0.$ L'Hôpital

$$\lim_{T \to \infty} T e^{-T} = \lim_{T \to \infty} \frac{T}{e^{T}} \overset{\downarrow}{=} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{e^{T}} = 0$$

Then,

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/y}}{y^2} dy = 0 + 0 - 2e^{-1} = 2e^{-1}$$

the integral converges.