UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
2 CÁLCULO INTEGRAL
EXAMEN # 3 (FORMA REMOTA). —A
FECHA: VIERNES 5 DE MARZO DE 2021.
HORA 16:00. HORA DE ENTREGA: 17:30 A 18:00

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 25 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** *y se resuelve de forma* **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(25 puntos)** Encuentre el área entre las curvas $y = 8\sin x$ y $y = \csc^2 x$.

(2) **(25 puntos)** Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana acotada (bordeada) por las curvas $y = x^2/4$ y $x = 2y^2$ alrededor de la recta $y = 1$.

(3) **(25 puntos)** La base de un sólido es de forma elíptica con ecuación $x^2/4 + y^2 = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isóceles con hipotenusa en la base.

(4) **(25 puntos)** Un resorte tiene longitud natural de 2 dm (decímetros). En equilibrio, se estira 3 dm con una fuerza de 25 Newtons. ¿Cuánta energía se necesita para estirarlo de 2 a 2.5 dm?

UAM - AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | Viernes Marzo 5, 2021

Examen #3 SOLUTION KEY. - A.

---

(1) Since the period of $\sin x$ and $\operatorname{cosec} x$ is 2π, we take a period interval $[0, 2\pi]$. $[0, 2\pi]$:
Since in the intervals $[0, \pi]$ and $[\pi, 2\pi]$, we have exactly the same figure, by symmetry, we take a look at the interval $[0, \pi]$.

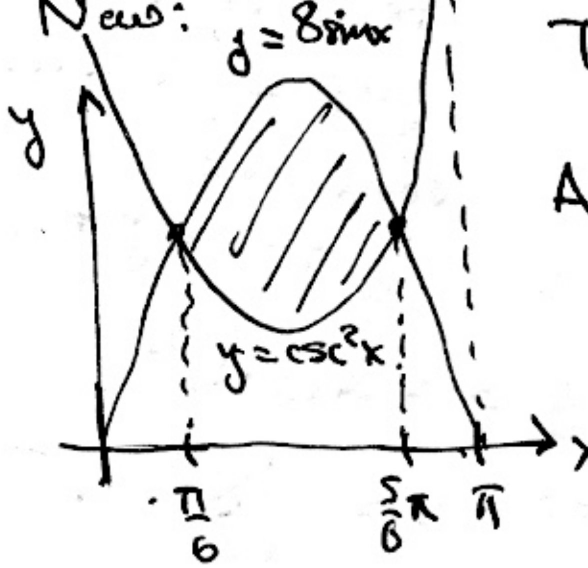
Now, the intersection points of this curves $y = 8\sin x$, $y = \csc^2 x$ satisfy the equation

$$8\sin x = \csc^2 x \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\csc^2(x)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin^3(x) = \frac{1}{8}$$

$$\left(\sin x = \frac{1}{\csc x}\right).$$

Then $\sin x = \frac{1}{2}$ and. $x = \frac{\pi}{6}$, and $x = \frac{5\pi}{6}$

Now:



Then, this area is:

$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (8\sin x) - \csc^2 x \, dx$$

$$= \left(-8\cos x\right) + \cot x \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}:$$

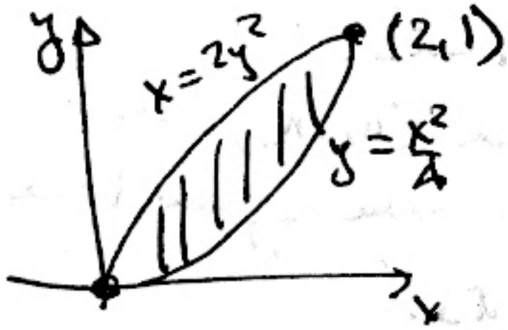
$$= -8\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$$= \left[-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \left[\left(-\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\right] = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= A = \boxed{\text{Area} = 6\sqrt{3}}$$

② We have the curves $y = \frac{x^2}{4}$ $x = 2y^2$:

They intersect if. $y = \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(2y^2)^2$



$$= \frac{4y^4}{4} = y^4$$

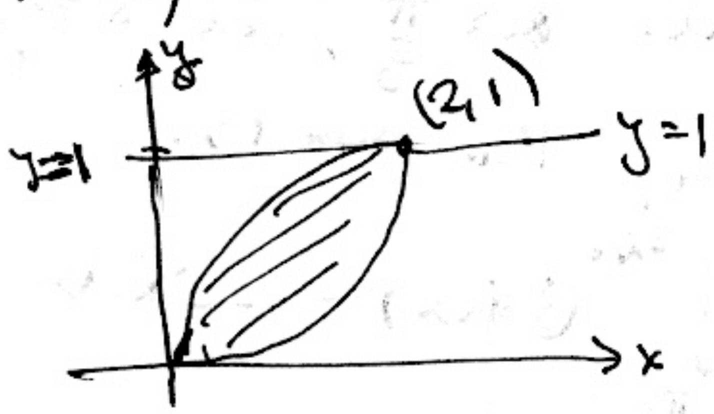
$$\Rightarrow y^4 - y = 0$$

$$y(y^3-1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}$$

If $y = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$

If $y = 1 \Rightarrow x = 2(1)^2 = 2 \Rightarrow (2,1)$

Now, this is rotated about the line $y=1$:



This is equivalent to shift the graphs 1 unit downwards

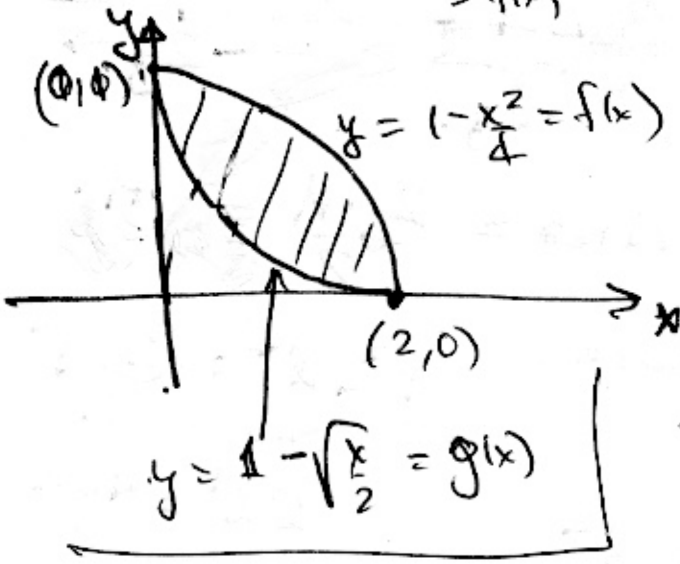
$$y \longmapsto y+1:$$

$y = \frac{x^2}{4} - 1$, and $x = 2(y+1)^2$

or $y = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$

We reflect about the x-axis: (i.e. $y \to -y$) to get.

$$y = 1 - \frac{x^2}{4} = f(x) \quad , \quad y = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}} = g(x)$$



and now rotate them:

$$V = \pi \int_0^2 f^2(x) - g^2(x)\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{x}{2} - 2\sqrt{\frac{x}{2}} + 1\right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \sqrt{2}\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5 \cdot 16} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \sqrt{2}\,\frac{2}{3} x^{3/2}\right)\Bigg|_0^2$$

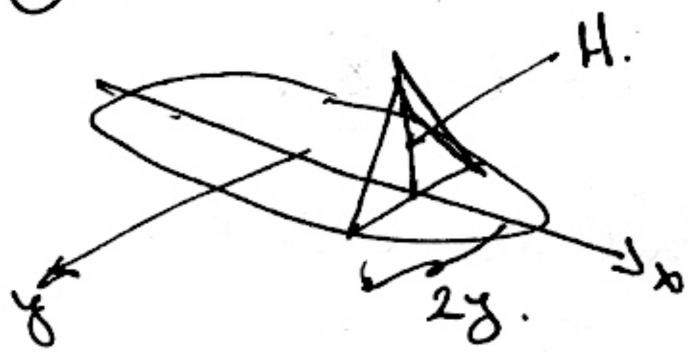
$$= \pi \left(\frac{32}{5 \cdot 16} - \frac{8}{6} - 1 + \sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{2})^2}{3}(\sqrt{2})^3\right)$$

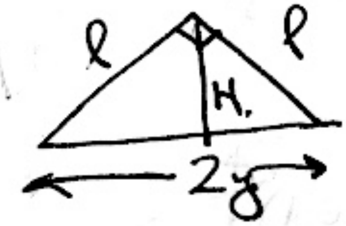
$$= \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} - \frac{1}{1} + \frac{(\sqrt{2})^6}{3}\right) = \pi \left(\frac{2 \cdot 3 - 20 - 15 + 8 \cdot 5}{15}\right)$$

$$= \frac{\pi}{15}(46 - 35) = \frac{11\pi}{15}$$

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{11\pi}{15}}$$

3.



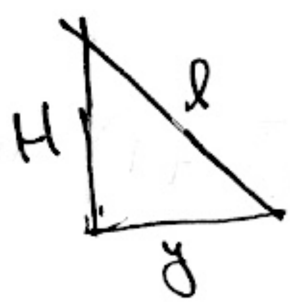


$$\text{Area} = \frac{2y \cdot H}{2} = y \cdot H.$$

Now, by Pythagorean theorem: $l^2 + l^2 = (2y)^2$

$$2l^2 = 4y^2$$

$$l^2 = 2y^2$$



$$H^2 + y^2 = l^2$$

$$H^2 + y^2 = 2y^2$$

$$\Rightarrow H^2 = y^2 \Rightarrow \text{Area} = y \cdot y = y^2$$

$\Rightarrow$ The ellipse is $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}. \Rightarrow A(x) = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Then, since $x \in [-2, 2]$ in the ellipse

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)\,dx = \int_{-2}^{2} 1 - \frac{x^2}{4}\,dx = 2\int_0^2 1 - \frac{x^2}{4}\,dx$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2 = 2\left(2 - \frac{8}{12}\right) = 2\left(\frac{24-8}{12}\right) = \frac{32}{12}$$

$\boxed{\text{Volume} = \frac{32}{12}}$ or $\boxed{V = 16/6}$ or $\boxed{V = 8/3}$

(4). In equilibrium, under a force of 25 N.
the spring stretches from $L = 0.2$ to $L = 0.3$ m

$\Rightarrow \quad \Delta L = 0.1$ m.

By Hooke's law: $\quad F = k \Delta L$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{25}{0.1} = \boxed{250 \text{ N/m.}}$$

Then, from equilibrium $x = 0$ (i.e.: $L = \frac{2}{10}$ m).
the force is:

$$F(x) = -kx:$$

So to take it from $\frac{20}{100}$ to $\frac{25}{100}$ m,

the energy required is:

$$W = \int_0^{0.05} F(x)\,dx = k \int_0^{0.05} x \, dx =$$

$$= \frac{k}{2} x^2 \Big|_0^{5/100} = \frac{250}{2} \left(\frac{5}{100}\right)^2 = \frac{25 \cdot 25}{2 \quad 1000} = \frac{625}{2(1000)}$$

$$= \frac{312.5}{1000} = \boxed{0.3125 \text{ Joules}}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
2 CÁLCULO INTEGRAL — B.
EXAMEN # 3 (FORMA REMOTA).
FECHA: VIERNES 5 DE MARZO DE 2021.
HORA 16:00. HORA DE ENTREGA: 17:30 A 18:00

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 25 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) (**25 puntos**) Encuentre el área entre las curvas $y = 8\sin x$ y $y = \csc^2 x$.

(2) (**25 puntos**) Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana acotada (bordeada) por las curvas $y = 2x^2$ y $x = y^2/4$ alrededor de la recta $y = 2$.

(3) (**25 puntos**) La base de un sólido es de forma elíptica con ecuación $x^2 + y^2/4 = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isóceles con hipotenusa en la base.

(4) (**25 puntos**) Un resorte tiene longitud natural de 200 mm. En equilibrio, se estira 300 mm con una fuerza de 2.5×10^1 Newtons. ¿Cuánta energía se necesita para estirarlo de 200 a 250 mm?

UAM - AZCAPOTZALCO $\boxed{\text{CÁLCULO INTEGRAL}}$ Viernes Marzo 5, 2021

Examen #3 SOLUTION KEY. - B

① Since the period of $\sin x$ and $\csc x$ is 2π, we take a period interval $[0, 2\pi]$. $[0, 2\pi]$:

Since in the intervals $[0, \pi]$ and $[\pi, 2\pi]$, we have exactly the same figure, by symmetry, we take a look at the interval $[0, \pi]$.

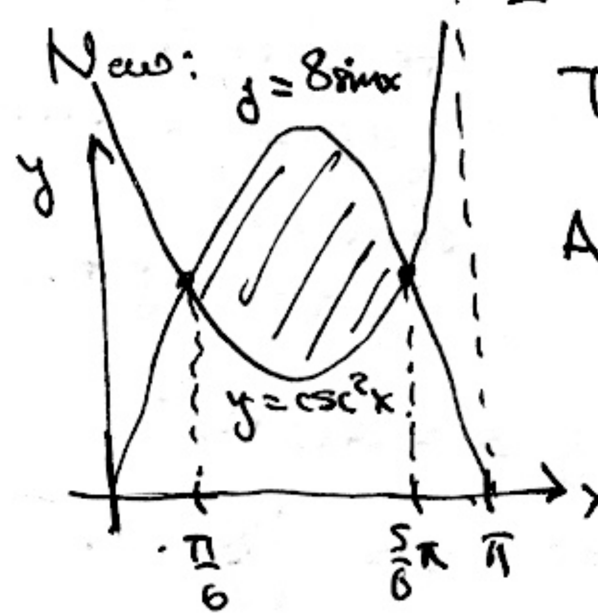
Now, the intersection points of this curves $y = 8\sin x$, $y = \csc^2 x$ satisfy the equation:

$$8\sin x = \csc^2 x \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\csc^2(x)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin^3(x) = \frac{1}{8}$$

$$\left(\sin x = \frac{1}{\csc x}\right).$$

Then $\sin x = \frac{1}{2}$ and. $x = \frac{\pi}{6}$, and $x = \frac{5\pi}{6}$

Now:



Then, this area is:

$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (8\sin x) - \csc^2 x \, dx$$

$$= \left(-8\cos x\right) + \cot x \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}:$$

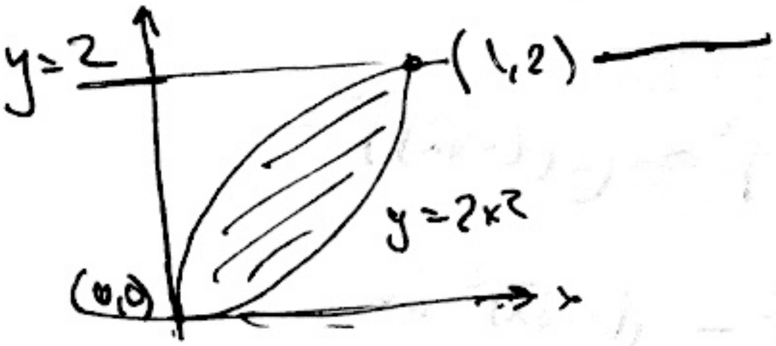
$$= -8\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$$= \left[-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \left[\left(-\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\right] = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= A = \boxed{\text{Area} = 6\sqrt{3}}$$

② We have the curves: $y = 2x^2$, $x = y^2/4$:

i.e. $y = 2x^2$, $y = 2\sqrt{x}$. They intersect if



$2x^2 = 2\sqrt{x}$. $x^2 = \sqrt{x}$

$\Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3-1)=0$

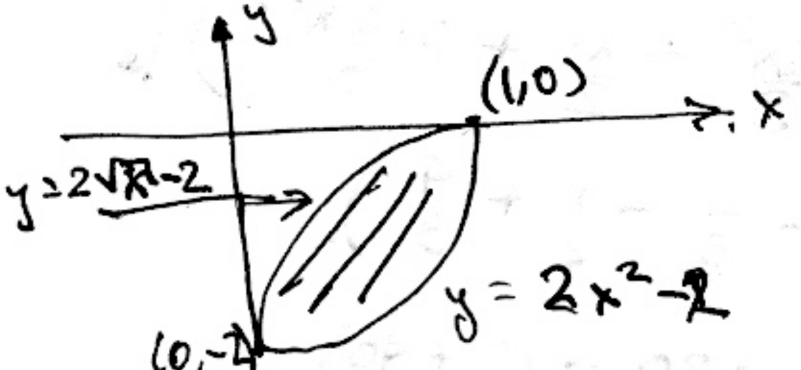
$\Rightarrow x=0$ and $x=1$.

Then $x=0 \Rightarrow y=0$ $\quad \boxed{\begin{matrix}(0,0)\\(1,2)\end{matrix}}$

$x=1 \Rightarrow y=2$

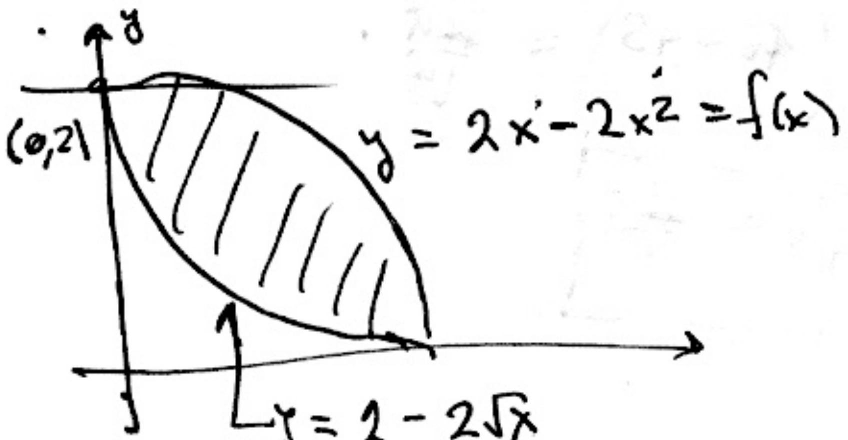
So, let us shift 2 units downwards:

$$y = 2x^2-2 \quad , \quad y = 2\sqrt{x}-2.$$



Rotate about x-axis:
($y=0$).

Reflect about x-axis: $y \longrightarrow -y$



$\Rightarrow f(x) = 2(1-x^2)$
$g(x) = 2(1-\sqrt{x})$

Then the volume is

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) - g^2(x)\, dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2(1-x^2)\right)^2 - \left(2(1-\sqrt{x})\right)^2 =$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1-x^3)^2 - (1-\sqrt{x})^2\, db$$

$$= 4\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) - (x - 2\sqrt{x} + 1)\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 x^4 - 2x^2 - x + 2\sqrt{x}\, dx.$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^1$$

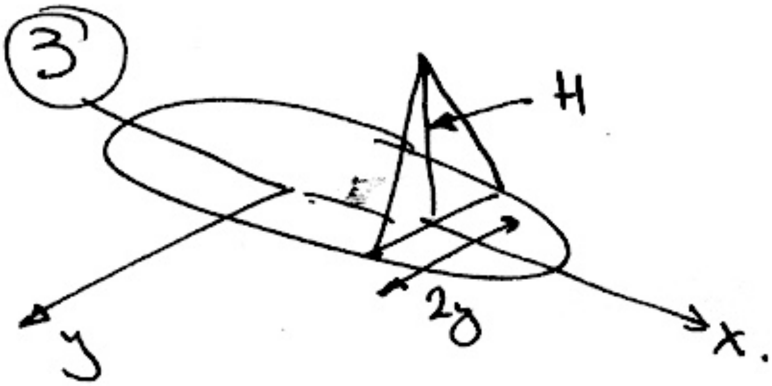
$$= 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right).$$

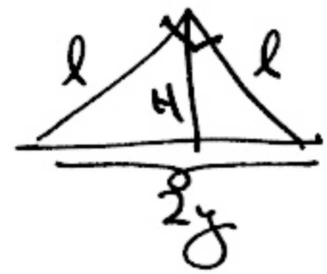
$$= \frac{4\pi}{30} \left(6 - 20 - 15 + 40 \right)$$

$$= \frac{4\pi}{30} \left(46 - 35 \right) = \frac{11\pi}{15}.$$

$$\boxed{V = \frac{11\pi}{15}}$$

3

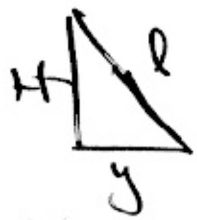




$$\text{Area} = \frac{2y \cdot H}{2} = y \cdot H.$$

Now. Pythagorean theorem: $l^2 + l^2 = (2y)^2$

and



$$H^2 + y^2 = l^2$$

$$\Rightarrow 2l^2 = 4y^2 \Rightarrow l^2 = \underline{2y^2 = l^2}\,\rfloor.$$

Then $H^2 + y^2 = l^2 = 2y^2 \Rightarrow H^2 = y^2$, $\underline{H = y}\,\rfloor.$

$$\Rightarrow \text{Area} = y \cdot H = y^2.$$

Now, ellipse is. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow y^2 = 4(x^2 - 1)$$

Then : Area $= A(x) = 4(1 - x^2)$.

Volume since $-1 \le x \le 1$, because of the ellips.

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\,dx = 8\int_0^1 1 - x^2\,dx$$

$$= 8\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$= 4 =$

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{16}{3}}$$

(4). In equilibrium, under a force of 25 N, the spring stretches from $L = 0.2$ to $L = 0.3$ m

$\Rightarrow \Delta L = 0.1$ m.

By Hooke's law: $F = k \Delta L$

$$\Rightarrow k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{25}{0.1} = \boxed{250 \text{ N/m.}}$$

Then, from equilibrium $x = 0$ (i.e.: $L = \frac{2}{10}$ m).

the force is:

$$F(x) = -kx:$$

So to take it from $\frac{20}{100}$ to $\frac{25}{100}$ m,

the energy required is:

$$W = \int_0^{0.05} F(x)\,dx = k \int_0^{0.05} x\,dx =$$

$$= \frac{k}{2} x^2 \Big|_0^{5/100} = \frac{250}{2}\left(\frac{5}{100}\right)^2 = \frac{25 \cdot 25}{2 \quad 1000} = \frac{625}{2(1000)}$$

$$= \frac{312.5}{1000} = \boxed{0.3125 \text{ Joules}}$$