UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
EXAMEN # 2 (FORMA REMOTA). — A.
FECHA: VIERNES 5 DE MARZO DE 2021.
HORA 17:30. HORA DE ENTREGA: 19:00 A 19:30

Nombre: ______________________________

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(20 puntos)** Resuelva la siguiente ecución diferencial.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 9t\frac{dy}{dt} - 9y = 0.$$

(2) **(20 puntos)** Encuentre el wronskiano correspondiente a las soluciones de la siguiente ecuación diferencial. (*Hint:* Hay dos formas de resolver este problema. Puede dejar su respuesta dejando una constante indeterminada inclusive).

$$\frac{1}{16}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

(3) **(20 puntos)** Verifique que la función $f(t) = 2t$ es solución de la siguiente ecución diferencial. Posteriormente, encuentre la solución general.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t(t+1)\frac{dy}{dt} + 2(t+1)y = 0.$$

(4) **(20 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial sin usar variación de parámetros:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 16e^t$$

(5) **(20 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{e^{2t}(2t)^2}$$

UAM - AZCAPOTZALCO | ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Examen # 3. ANSWER KEY. | Viernes, Marzo 5, 2021

1) The equation $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 9t\frac{dy}{dt} - 9y = 0$

is the Euler-Cauchy type equation. 1) Linear, 2) homogeneous. 3) but it is not constant coefficients, a monomial with the degree of the corresponding de order of the derivative. We can propose a solution of the form.

$$y(t) = t^\alpha.$$

Then

$$t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + 9t\,\alpha t^{\alpha-1} - 9t^\alpha = 0$$

i.e.

$$\alpha(\alpha-1) + 9\alpha - 9 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + 9\alpha - 9 = 0$$

$$\alpha^2 + 8\alpha - 9 = 0. \qquad \alpha = -9$$

$$(\alpha+9)(\alpha-1) = 0. \Rightarrow \quad \alpha = 1.$$

Then, $y_1(t) = t^{-9}$ and $y_2(t) = t$.

The solution is $\boxed{y(t) = C_1 t^{-9} + C_2 t.}$

(2) The equation is, equivalently:

$$\ddot{y} + 16\dot{y} + 64y = 0$$

Method (1)

According to what we studied in class, or in Boyce - DiPrima - Meade section 3.2 (Abel's Theorem, Theorem 3.2.7 in text), for $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$.

$$W[y_1, y_2](t) = C\exp\left(-\int p(t)\,dt\right)$$

Here, $p(t) = 16$: then

$$\boxed{W[y_1, y_2](t) = Ce^{-16t}}$$

C is an undetermined constant.

Method (2)

Now, this eq'n is 1) linear 2) const coef's 3) homogeneous } $y(t) = e^{rt}$.

$$\Rightarrow \quad r^2 + 16r + 64 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r + 8)(r + 8) = 0$$

$\Rightarrow$ Solutions: $y_1(t) = e^{8t}$, $y_2(t) = {}^{8}te^{8t}$

with $\dot{y}_1 = 8e^{8t}$, $\dot{y}_2(t) = (1 + 8t)e^{8t}$

Then

$$W = \det\begin{pmatrix} e^{8t} & te^{8t} \\ 8e^{8t} & (1+8t)e^{8t} \end{pmatrix} = (1+8t)e^{16t} - 8te^{18t}$$

$$\Rightarrow \boxed{W[y_1, y_2](t) = e^{16t}}$$

(3) We have the function $f(t) = 2t$. Let us check it solves the Diff Eq: $\quad y_1(t) = 2t$

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} y - 2t(t+1)\frac{dy}{dt} + 2(t+1) y$$
$$= t^2 (2t)^{\cdot\cdot} - 2t(t+1)(2t)^{\cdot} + 2(t+1)2t$$
$$= \quad 0 - 2t(t+1)2 + 4t(t+1) = 0 \checkmark$$

It holds. Now: a second solution is:

<u>Method of the reduction of order</u>.

$$y_2(t) = A(t) y_1(t) = 2t A(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = 2A + 2t\dot{A} = 2(A + t\dot{A})$$
$$\ddot{y}_2(t) = 2\dot{A} + 2\dot{A} + 2t\ddot{A} =$$
$$= 2(2\dot{A} + t\ddot{A}).$$
$$= 4\dot{A} + 2t\ddot{A}$$

Hence:

$$t^2(4\dot{A} + 2t\ddot{A}) - 2t(t+1)(2A + 2t\dot{A}) + 2(t+1)2tA = 0.$$
$$2t^3\ddot{A} + (4t^2 - 4t^2(t+1))\dot{A} + \underbrace{(-4t(t+1) + 4(t+1)t)}_{=0}A = 0$$

i.e. $\quad 2t^3\ddot{A} + (4t^2 - 4t^3 - 4t^2)\dot{A} = 0$

$$2t^3\ddot{A} + (-4t^3)\dot{A} = 0 \Rightarrow \ddot{A} - 2\dot{A} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{A} - 2A = C_1 \text{. Integrating factor: } \mu = e^{-2t}$$
$$e^{-2t}\dot{A} - 2e^{-2t}A = C_1 e^{-2t}$$
$$(e^{-2t}A)^{\cdot} = C_1 e^{-2t} \quad \text{Integrating again}$$

$$e^{-2t} A = \tilde{c}_1 e^{-2t} + c_2$$

$$A(t) = \tilde{c}_1 + c_2 e^{2t}$$

Then $y_2(t) = 2t\, A(t) = 2t\,(\tilde{c}_1 + c_2 e^{2t})$

$$= \tilde{c}_1 2t + c_2 t e^{2t}$$

But $\tilde{c}_1 2t$ is already solution: $y_1(t) = 2t$.

Then: $\boxed{y_2(t) = t e^{2t}}$

Then, the general solution is:

$$\boxed{y(t) = c_1 t + c_2 t e^{2t}}$$

④ The Diff Eq: $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 16e^t$

Is 1) Linear

2) Constant coef.

3) The homogeneous eq'n. $\ddot{y}_h + 2\dot{y}_h + y_h = 0$

can be solved by: $y_h(t) = e^{rt}$.

Then: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1$

Then $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} t$.

Non homogeneous equation particular solution:

The non-homogeneity is an exponential: $f(t) = 16e^t$

Then, first trial $Y_1(t) = Ae^t$ will work,

since it does not repeat the homoge. eq'n.

Then $\dot{Y}_1 = Ae^t$, $\ddot{Y}_1 = Ae^t$. thus.

$Ae^t + 2(Ae^t) + Ae^t = 16e^t$

$\Rightarrow 4A = 16 \Rightarrow A = 4$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-t}(c_1 + t c_2) + 4e^t}$

⑤ The eq'n:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = \frac{\cancel{4}e^{-2t}}{\cancel{4}t^2}$$

is 1) Linear and 2) homogeneous, but the non-homogeneity is not the product of exp, sin, cos or exp. Then, we use the Variation of parameter method.

Ⓘ Homogeneous eq'n

1) Linear
2) Const Coef
3) homogeneous

$\Big\}\ y(t) = e^{rt}$

$$\ddot{y}_h + 4\dot{y}_h + 4y_h = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1(t) = e^{-2t} \qquad y_2(t) = te^{-2t}.$$

$$W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-4t}(1-2t) + 2te^{-4t}$$

$$= e^{-4t} \checkmark$$

The particular solution is:

$$y_p(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t)$$

where:

$$A(t) = -\int \frac{y_2(t)\, f(t)}{a(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt \,, \quad \text{with } f(t) = \frac{e^{-2t}}{t^2}$$

$$a(t) = 1$$

$$= -\int \frac{t e^{-2t} \left(e^{-2t}/t^2\right)}{1 \cdot e^{-4t}}\, dt$$

$$= -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t| .$$

$$B(t) = \int \frac{y_1(t)\, f(t)}{a(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

$$= \int \frac{e^{-2t} \left(e^{-2t}/t^2\right)}{1 \cdot e^{-4t}}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} .$$

Then: $y_p(t) = \left(-\log|t|\right) e^{-2t} + \left(-\frac{1}{t}\right) t\, e^{-2t}$

$$= -e^{-2t} \log|t| - \underbrace{e^{-2t}}_{\text{Already sol}^{n} \text{ of homogeneous eq}^{n}}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -e^{-2t} \log|t|$$

and

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2\, t e^{-2t} - e^{-2t} \log|t|}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2020.
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
EXAMEN # 2 (FORMA REMOTA). — B
FECHA: VIERNES 5 DE MARZO DE 2021.
HORA 17:30. HORA DE ENTREGA: 19:00 A 19:30

Nombre: ______________________________

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(20 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{t^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - 3y = 0.$$

(2) **(20 puntos)** Encuentre el wronskiano correspondiente a las soluciones de la siguiente ecuación diferencial. (*Hint:* Hay dos formas de resolver este problema. Puede dejar su respuesta dejando una constante indeterminada inclusive).

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

(3) **(20 puntos)** Verifique que la función $g(t) = t/2$ es solución de la siguiente ecución diferencial. Posteriormente, encuentre la solución general.

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2} - t(t+4)\frac{dy}{dt} + (t+4)y = 0.$$

(4) **(20 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial sin usar variación de parámetros:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 64e^{2t}$$

(5) **(20 puntos)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

UAM-Azcapotzalco. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen #3. Answer Key

(1). La ecuación diferencial es del tipo Euler-Cauchy.

$$\frac{t^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - 3y = 0.$$

It admits solutions of the form: $y = t^\alpha$.

$$t^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^{\alpha-2} + t\alpha t^{\alpha-1} - 3t^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$$

$$(\alpha+3)(\alpha-2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 2. \end{array} \right.$$

Then, the solution is

$$\boxed{y(t) = \frac{C_1}{t^3} + C_2 t^2}$$

(2) We have the Diff Eq: $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 0$,

which is 1) Linear

2) Const. Coeff's $\Rightarrow$ $y(t) = e^{rt}$.

3) Homogeneous

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \Rightarrow (r+4)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -4.$$

Solutions: $y_1(t) = e^{-4t}$; $y_2(t) = te^{-4t}$.

then $\dot{y}_1(t) = -4e^{-4t}$; $\dot{y}_2(t) = (1-4t)e^{-4t}$

and so:

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{pmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} \\ -4e^{-4t} & (1-4t)e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$= (1-4t)e^{-8t} + 4te^{-8t}$$

$$\boxed{W[y_1, y_2](t) = e^{-8t}.}$$

Method (2) According to Abel's theorem (Thm 3.2.7, in section 3.2 Boyce-DiPrima-Meade): $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$

$$W[y_1, y_2](t) = C \exp\left(-\int p(t)dt\right)$$

Here, $p(t) = 8$;

$$\boxed{W[y_1, y_2](t) = Ce^{-8t}}$$

C = undetermined constant

(3) We know the Diff. Eq'n with $y_1(t) = \frac{t}{2}$. If we substitute:

$$2t^2 \ddot{y}_1 - t(t+4)\dot{y}_1 + (t+4)y_1 =$$

$$= 0 - t(t+4)\frac{1}{2} + (t+4)\frac{t}{2} = 0 \checkmark$$

Now, looking for solutions of the form. $y_2(t) = A(t)y_1(t)$

<u>Method</u> of <u>reduction</u> of <u>order</u>

$$y_2(t) = A(t)\, y_1(t) = A(t)\frac{t}{2}$$

$$\dot{y}_2(t) = \dot{A}\frac{t}{2} + \frac{A}{2}$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{A}\, t + \dot{A}\, . +$$

Substitute into the Diff Eq'n.

$$2t^2(t\ddot{A} + \dot{A}) - \frac{t}{2}(t+4)(t\dot{A} + A) + (t+4)\frac{t}{2}A = 0$$

Grouping terms.

$$\ddot{A}(2t^3) + \dot{A}\left(2t^2 - \frac{t^2}{2}(t+4)\right) + A\underbrace{\left(-\frac{t(t+4)}{2} + \frac{(t+4)t}{2}\right)}_{=0} = 0$$

$$2t^3\ddot{A} + \left(2t^2 - \frac{t^3}{2} - 2t^2\right)\dot{A} = 0$$

$$2t^3\ddot{A} + \left(-\frac{t^3}{2}\right)\dot{A} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{A} - \frac{1}{4}\dot{A} = 0 \quad \text{Integrate:} \quad \dot{A} - \frac{1}{4}A = C_1$$

Integrating factor: $\mu = e^{-t/4}$ $\Rightarrow e^{-t/4}\dot{A} - \frac{e^{-t/4}}{4}A = C_1 e^{-t/4}$

$$\Rightarrow (e^{-t/4}A)^{\bullet} = C_1 e^{-t/4}.$$

Integrating again: $e^{-t/4} A = \frac{c_1}{4} e^{-t/4} + c_2$

$$\Rightarrow \quad A(t) = \tilde{c}_1 + c_2 e^{t/4}.$$

Then $y_2(t) = A(t)\, y_1(t) = \left(\tilde{c}_1 + c_2 e^{t/4}\right) \frac{t}{2}$

$$= \underbrace{\frac{\tilde{c}_1}{2} t}_{\text{Already, on homogeneous eq'n sol'n.}} + \frac{c_2}{2} t e^{t/4}$$

Then,

$$y_2(t) = t e^{t/4}$$

Then, the general solution is

$$\boxed{y(t) = c_1 t + c_2 t e^{t/4}}$$

(4) This Diff Eq'n is 1) Linear
2) Constant coeffteints

and the non-homogeneous term is exp, sin, cos, polynom or product of them. Then, we can use Undetermined coefficients:

Step (I). Solve homogeneous eq'n:

$\ddot{y}_h + 4\dot{y}_h + 4y_h = 0.$ 1) Linear 2) Constant Coef 3) homogeneous $\Big\}$ $y(t) = e^{rt}$

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$\Rightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$

$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$

(II) Here, $g(t) = 64e^{2t}$.

Then, first trial $Y_1(t) = Ae^{2t}$ works since it does not repeat homogeneous solution:

$\dot{Y}_1 = 2Ae^{2t}$ $\ddot{Y}_1 = 4Ae^{2t}$

Substituting: $4Ae^{2t} + 4(2Ae^{2t}) + 4Ae^{2t} = 64e^{2t}$

$16Ae^{2t} = 64e^{2t}$

$\boxed{A = 4}$

Then, the solution

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + 4e^{2t}}$$

⑤ The Diff. Eq'n

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

is 1) Linear, 2) constant coeff's, but 3) the non-homogeneous term is not exp, sin, cos, polynomial or the product of them. Then, we must use Variation of parameters to solve it.

Step Ⓘ Homogeneous eq'n:

$$\ddot{y}_h + 2\dot{y}_h + y_h = 0$$

1) Linear
2) Const Coeff's
3) homogeneous

$$\Rightarrow y_h(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (r+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow r_1 = r_2 = -1.$$

$$\Rightarrow \underline{y_1(t) = e^{-t}}, \quad \underline{y_2(t) = te^{-t}}.$$

Step Ⓘⓘ

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)e^{-2t} + te^{-2t}$$

$$= e^{-2t}.$$

Then, the particular solution becomes:

$$y_p(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t).$$

where

$$A(t) = -\int \frac{y_2(t)\, g(t)}{a(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt, \qquad g(t) = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

$$= -\int \frac{(t\, e^{-t})(e^{-t}/t^2)}{1 \cdot e^{-2t}}\, dt$$

$$= -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t|.$$

$$B(t) = \int \frac{y_1(t)\, g(t)}{a(t)\, W[y_1, y_2](t)}\, dt,$$

$$= \int \frac{(e^{-t})(e^{-t}/t^2)}{1 \cdot e^{-2t}}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t}.$$

Then:

$$y_p(t) = (-\log|t|)\, t e^{-t} + \left(-\frac{1}{t}\right) t e^{-t}$$

$$= -t \log|t| e^{-t} - e^{-t}$$

Then, the sol'n to the Diff Eq'n is:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} - (t \log|t| + \underbrace{1}_{}) e^{-t}$$

This is sol'n homogeneous eq'n

$$\boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} - t \log|t|}$$