Temas selectos de Ingeniería Física:
Matemáticas para la Mecánica Cuántica

Profesor Jesús Adrián Espínola Rocha. *email:* `jaer@azc.uam.mx`
Departamento de Ciencias Básicas. UAM-Azcapotzalco.

4 de enero de 2021.

1 Justificación.

Toda la Física que conocemos se fundamenta en las observaciones que uno hace, ya se a través de la vida cotidiana o ya, fundamentada como cienca, a través de experimentos. El experimento es quien tiene la última palabra en la Física. No obstante, para describir lo que se observa en experimentos, se debe comunicar de una forma. Bien es conocida la afirmación de Galileo: "*Las matemáticas es el lenguaje de la naturaleza.*"

De este modo, Newton tuvo que inventar sus "*fluxiones*" o flujos, lo que conocemos ahora como derivadas, para describir todo lo que él observaba y había estudiado de sus antecesores como Galileo o Kepler y Tycho Brahe.

No obstante, para la primer mitad del siglo XX, las guerras mundiales forzaron a un distanciamiento entre la Física y las Matemáticas. El desarrollo de armamento forzaba a la Física a avanzar a pasos impresionantes, mientras las Matemáticas tenían otro ritmo. Esto condujo a una "separación" entre ambas ciencias. Una de las ramas de la Física que desarrolló sus propias Matemáticas fue, precisamente, la Mecánica Cuántica. Muchas de estas Matemáticas no eran totalmente entendidas y ayudaron a las Matemáticas a desarrollar unas nuevas (como la "Teoría de Distribuciones y la Delta de Dirac") como otras que se desarrollaron independientemente y que posteriormente se observó que estaban inmersas como los espacios de Hilbert.

En este curso aprenderemos que ya conocemos Matemáticas (por ejemplo, geometría y cálculo en dimensión 3) que se pueden generalizar a espacios de dimensión infinita e interpretar en estos espacios la Mecánica Cuántica. La propagación de ondas que ya conocemos, por ejemplo en el agua, que son ondas dispersivas, las podemos reformular y ver que, efecticamente, la ecuación de Schrödinger es una ecuación de onda dispersiva. Esto, por citar dos ejemplos, pero hay muchos otros que ya conocemos sus Matemáticas y que necesitamos interpretarlas de acuerdo a cierto fenómeno en Mecánica Cuántica.

En este curso es lo que trataremos. De usar las Matemáticas que ya conocemos, y aprender otras nuevas, y ver que, efectivamente, tienen una interpretación en Mecánica Cuántica y que se puede trabajar con estas Matemáticas (que pueden ser muy rigurosas) en el campo de la Mecánica Cuántica.

No obstante, a pesar de lo riguroso de muchos de estos temas, el curso se enfocará en dar una idea intuitiva de muchas de estas Matemáticas, para no obscurecer su interpretacin física. En pocas palabras, la idea es usar la lógica y el lenguaje de las Matemáticas para entender las ideas de la Mecánica Cuántica.

También es importante resaltar que **no se trata** de un curso de "métodos matemáticos para la mecánica cuántica", que bien pueden estudiarse aparte de la Teoría Cuántica.

El texto en el que se basará el curso es el libro del profesor Stephen Bruce Sontz (del CIMAT, Centro de Investiación en Matemáticas), *An Introductory Path to Quantum Theory: using Math-*

ematics to understand ideas of Physics. Cabe señalar que el profesor Sontz es doctor en Física, y aparte doctor en Matemáticas, y su área de investigación es precisamente la Física-Matemática, por lo que es un experto en el tema.

Quiero cerrar este apartado con una frase del prefacio, que retrata muy bien lo que pretendo y será el objetivo principal del curso:

"*Para mí este libro significa mostrar cómo el lenguaje y la lógica de las matemáticas nos ayuda a entender las ideas en la teoría cuántica. [...] mi objetivo primordial es obtener un mejor entendimiento de las ideas físicas que hacen la Mecánica Cuántica lo que es, y cómo estas ideas motivan el estudio de las Matemáticas. Para mí la teoría cuántica, como la de átomos y moléculas, motiva el estudio de la teoría espectral de operadores no acotados (¡lo que quiera esto signifique!) y no al revés.*"

2 Objetivos.

1. Estudiar y repasar conceptos ya conocidos de Matemáticas que se han aprendido en diversos cursos de Matemáticas y Física en la UAM-Azcapotzalco.

2. Interpretar estas Matemáticas en el contexto de la Física en general, y de la Mecánica Cuántica en particular.

3. Aprender nuevas Matemáticas como extensiones o generalizaciones de Matemáticas ya conocidas de los cursos previos de Física y Matemáticas.

4. Interpretar estas Matemáticas más generales en términos de la Física Cuántica.

5. Identificar cuándo una onda es lineal o no lineal, qué es una onda dispersiva y una hiperbólica.

6. Verificar que, efectivamente, la ecuación de Schrödinger es la ecuación de una onda dispersiva con un elemento extra: su potencial.

7. Interpretar los espacios de Hilbert como generalizaciones del espacio Euclidiano de 3 dimensiones con su geometría: productos punto y normas (magnitudes) de vectores.

8. Aprender que los estados cuánticos, efectivamente, viven en Espacios de Hilbert.

3 Pre-requisitos

Se les pide a los estudiantes como pre-requisito tener:

1. Un sólido conocimiento de Cálculo Diferencial e Integral, así como también de

2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

3. Tener conocimiento de Cálculo de Varias Variables.

4. Se necesitan también los cursos de Complementos de Matemáticas y Álgebra Lineal: operaciones y álgebra de matrices, cálculo de determinantes y trazas, y de valores y vectores propios de una matriz.

5. Matemáticas Aplicadas para la Ingeniería (MAPI) es necesario sobre todo en un buen conocimiento de la Transformada de Fourier, que jugar un papel central en el curso. La sección sobre Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues muchas de las ecuaciones que aparecerán serán de este tipo y el método de separación de variables y el concepto de de valor propio de una EDO y el de cuantización serán usados frecuentemente.

6. El curso de Funciones Especiales es recomendable, pero no es necesario, en el sentido que muchas de las ideas de este curso se complementarán y serán reforzadas. Si ya se llevó este curso, ayudará a comprender muchas de las ideas que se presenten en el presente curso.

4 Temas.

1. Elementos de propagación de ondas. (Una semana).
2. Conceptos básicos: Operadores, onda-partícula; ecuación de Schrödinger. (Dos semanas).
3. Interpretación de la función de onda. Espacios de Hilbert. (Cuatro semanas).
4. Problemas clásicos de teoría cuántica. (El oscilador armónico, el átomo de hidrógeno, el momentum angular). (Tres semanas).
5. El principio de incertidumbre. (Una semana).

5 Bibliografía.

1. **Texto:** S.B. Sontz. *An Introductory Path to Quantum Theory: using Mathematics to understand ideas of Physics.* 2020. Springer.
2. G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* 1974. John Wiley and Sons.
3. R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Volume I. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons.
4. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics.* Volumes I and III. Boston. Addison-Wasley.
5. P. Miller. *Applied Asymptotic Analysis.* Graduate Studies in Mathematics. Vol. 75. 2005. American Mathematical Society.
6. John von Newman. *Foundations of Quantum Mechanics.* 1934. Princeton University Press.