UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO INTEGRAL
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2021. PEER.

EXAMEN # 1.
FECHA: VIERNES 3 DE SEPTIEMBRE DE 2021

Nombre: ANSWER KEY - A.

Instrucciones:

- El examen consta de **SEIS** problemas con diferentes puntajes.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje:** Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(10 puntos.)** Calcule la derivada de $F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \tan^4(s) + 1 \, ds$, en donde $u(y) = \sin y$ y $v(y) = \tan y$.

(2) **(20 puntos.)** Utilice sumas de Riemann para estimar el "*área debajo de la gráfica*" de $f(x) = \frac{1}{x}$, en $[1, 5]$, con cuatro rectángulos.

(3) **(20 puntos.)** Usando únicamente propiedades de la integral y geometría, evalúe

$$\int_{-2}^{2} \left(-3|x| + \sqrt{4-x^2}\right) dx.$$

(4) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de $(\sqrt{x})^3 \sin(x^{5/2} + 4)$.

(5) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de la función $x^2 e^{3x}$.

(6) **(10 puntos.)** El doctor López-Gatell, al darnos diariamente los datos de las infecciones por el virus SARS-CoV-2, nos está proporcionando la función $I'(t)$, la derivada de la función $I(t)$, en donde $I(t)$ es el número de casos con infección al tiempo t (en días). Explique, en sus propias palabras y usando la teoría vista en el curso, qué significa la siguiente integral, en donde T es el tiempo en días que lleva la epidemia en México hasta el día de hoy.

$$\int_0^T I'(t) \, dt.$$

Examen #1. Answer Key - A.

(1) We use the properties of the integral: (using Stewart)

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{u(y)}^{v(y)} \left(\tan^4(s)+1\right) ds$$

Prop 8

$$= \frac{d}{dy}\left(\int_{u(y)}^{0} \left(\tan^4(s)+1\right) ds\right) + \frac{d}{dy}\left(\int_{0}^{v(y)} \left(\tan^4(s)+1\right) ds\right)$$

Prop 6

$$= -\frac{d}{dy}\left(\int_{0}^{u(y)} \left(\tan^4(s)+1\right) ds\right) + \frac{d}{dy}\left(\int_{0}^{v(y)} \left(\tan^4(s)+1\right) ds\right)$$

Chain rule

$$= -\frac{d}{du}\left(\int_{0}^{u} \left(\tan^4 s+1\right) ds\right)\frac{du}{dy} + \frac{d}{dv}\left(\int_{0}^{v} \left(\tan^4(s)+1\right)\right)\frac{dv}{dy}.$$

Fundamental Theorem of Calculus I

$$= -\left(\tan^4 u+1\right)\frac{du}{dy} + \left(\tan^4(v)+1\right)\frac{dv}{dy}$$

Since $u = \sin y$, $v = \tan y$, then:

$$\boxed{\frac{dF}{dy} = -\left(\tan^4(\sin y)+1\right)\cos y + \left(\tan^4(\tan y)+1\right)\sec^2 y}$$

② We have the interval $[1, 5]$, so the x-increment is $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$, since $n = 4$ = number of sub-intervals. We take, $a = x_0 = 1$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

$x_1 = 2$

Taking right-hand-endings points: $x_2 = 3$

$x_3 = 4$.

$x_4 = 5 = b$

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{30 + 20 + 15 + 12}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{77}{60}$$

$$\boxed{\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{77}{60}}$$

③ Using properties of the integral (using Stewart):

$$\int_{-2}^{2}\left(-3|x| + \sqrt{4-x^2}\right)dx = 2\int_0^2 -3|x| + \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

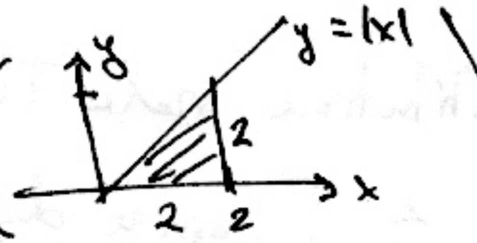
Prop ⑥ Sect. 4.5

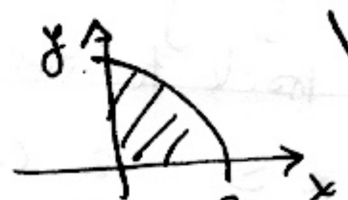
Since $|x|$, $\sqrt{4-x^2}$ are even.

$$= 2\left(\int_0^2 -3|x|\,dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right), \text{ by prop. ② Sect. 4.2}$$

$$= 2\left(-3\int_0^2 |x|\,dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right), \text{ by prop. ③}$$

Now:

$$\int_0^2 |x|\,dx = \text{Area}\Bigg($$  $$\Bigg) = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \text{Area}\Bigg($$  $$\Bigg) = \frac{\pi(2)^2}{4} = \pi.$$

Then:

$$\boxed{\int_{-2}^{2}\left(-3|x| + \sqrt{4-x^2}\right)dx = 2\left(-3\cdot 2 + \pi\right) = 2\pi - 12.}$$

④ We want to compute: $\int x^{3/2} \sin(x^{5/2}+4)\, dx$

Observe that: $$x^{3/2} = \frac{2}{5}\frac{d}{dx}\left(x^{5/2}+4\right)$$

then
$$= \frac{2}{5}\int \frac{d}{dx}\left(x^{5/2}+4\right)\sin\left(x^{5/2}+4\right)\, dx.$$

Using the change of variables $u(x) = x^{5/2}+4$.

$$= \frac{2}{5}\int \frac{d}{dx}\left(u(x)\right)\sin\left(u(x)\right)\, dx.$$

By substitution rule theorem.

$$= \frac{2}{5}\int \sin u \, du = -\frac{2}{5}\cos u + C$$

thus: we go back to our original variable x:

$$\boxed{\int x^{3/2}\sin\left(x^{5/2}+4\right) dx = -\frac{2}{5}\cos\left(x^{5/2}+4\right) + C}$$

Do not forget the integration constant.

5 We want: $\int x^2 e^{3x}\, dx$.

We have to integrate by parts twice.

$$\int x^2 (e^{3x})\, dx = \int x^2 \left(\frac{1}{3} e^{3x}\right)' = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int (x^2)' \frac{e^{3x}}{3}\, dx$$

$$= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3}\, dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \left(\frac{e^{3x}}{9}\right)' dx$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - 2x \frac{e^{3x}}{9} - \int (-2x)' \frac{e^{3x}}{9}\, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x}\, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' dx$$

$$\boxed{\int x^2 e^{3x}\, dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27}\right) e^{3x} + C}$$

Do not forget the integration constant.

⑥ Lo que Gottlieb nos da diariamente son los casos nuevos confirmados $I'(t)$. Si sumamos (integramos) todos esos casos confirmados después de T días de epidemia, tenemos el número total de infecciones al día T, $I(T)$.

Por otra parte, por el Teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_0^T I'(t)\,dt = I(T) - T(0)$$

Para el día cero, no hay infectados: $I(0)=0$

Entonces, $\int_0^T I'(t)\,dt = I(T)$.

que coincide con nuestro argumento anterior!

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO INTEGRAL
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2021. PEER.

EXAMEN # 1.
FECHA: VIERNES 3 DE SEPTIEMBRE DE 2021

Nombre: ANSWER KEY - B

Instrucciones:

- El examen consta de **SEIS** problemas con diferentes puntajes.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL.** Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje:** Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(10 puntos.)** Calcule la derivada de $G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} \tan^4(s) + 5\, ds$, en donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^5$

(2) **(20 puntos.)** Utilice sumas de Riemann para estimar el "*área debajo de la gráfica*" de $g(x) = x^2$, en $[-5, -1]$, con cuatro rectángulos.

(3) **(20 puntos.)** Usando unicamente propiedades de la integral y geometría, evalúe

$$\int_{-4}^{4} \left(3 - \frac{1}{2}|x|\right) dx.$$

(4) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de $\left(1 - \cos\left(\frac{t}{4}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{t}{4}\right)$.

(5) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de la función $x^2 e^{x/2}$.

(6) **(10 puntos.)** El doctor López-Gatell, al darnos diariamente los datos de las infecciones por el virus SARS-CoV-2, nos está proporcionando la función $I'(t)$, la derivada de la función $I(t)$, en donde $I(t)$ es el número de casos con infección al tiempo t (en días). Explique, en sus propias palabras y usando la teoría vista en el curso, qué significa la siguiente integral, en donde T es el tiempo en días que lleva la epidemia en México hasta el día de hoy.

$$\int_0^T I'(t)\, dt.$$

UAM - Azcapotzalco. Cálculo Integral Viernes 3 de sept 2021

Examen # 1. ANSWER KEY - B

① . We use properties of the integral (see Stewart).

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{f(x)}^{g(x)} (\tan^4(s) + 5)\, ds\right) \text{ by}$$

Prop ⑤

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_{f(x)}^{0} (\tan^4(s) + 5)\, ds + \int_0^{g(x)} \tan^4(s) + 5\, ds\right)$$

Prop ⓪

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{f(x)} (\tan^4(s) + 5)\, ds + \int_0^{g(x)} (\tan^4(s) + 5)\, ds\right)$$

$$= -\frac{d}{df}\left(\int_0^{f} (\tan^4(s) + 5)\, ds\right)\frac{df}{dx} +$$

$$+ \frac{d}{dg}\left(\int_0^{g} (\tan^4(s) + 5)\, ds\right)\cdot\frac{dg}{dx}$$

Fundamental Theorem of Calculus I

$$= -(\tan^4(f) + 5)\frac{df}{dx} + (\tan^4(g) + 5)\frac{dg}{dx}$$

Since $f(x) = x^2$, $g(x) = x^5$.

$$\boxed{\frac{dG}{dx} = -(\tan^4(x^2) + 5)2x + (\tan^4(x^5) + 5)5x^4}$$

= 1 =

(2) We have the interval $[-5,-1]$, so, the x-increment is $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{(-1)-(-5)}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$, since $n = 4$ = # of sub-intervals.

We then take: $a = x_0 = -5$

$x_1 = -4$

Taking right-hand-endings points: $x_2 = -3$

$x_3 = -2$

$x_4 = -1 = b$.

$$\int_{-5}^{-1} x^2\,dx \simeq \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \Delta x$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$= (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2$$

$$= 16 + 9 + 4 + 1$$

Then
$$\boxed{\int_{-5}^{1} x^2\,dx \cong 30}$$

③ Using the properties of the integral. (using Stewart):

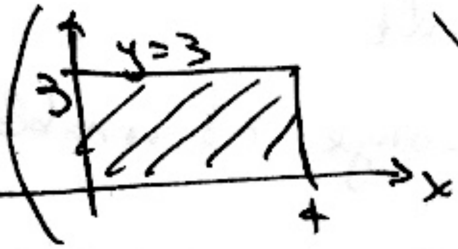
$$\int_{-4}^{4}\left(3-\frac{1}{2}|x|\right)dx = 2\int_{0}^{4}\left(3-\frac{1}{2}|x|\right)dx.$$

Prop. ⑥. Sect. 4.5, since $y=3$, $|x|$ are even.

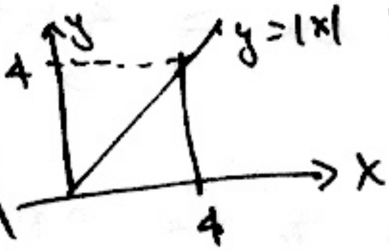
$$= 2\left(\int_0^4 3\,dx + \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}\right)|x|\,dx\right), \text{ by prop ②, Sect 4.5}$$

$$= 2\left(\int_0^4 3\,dx + \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^4 |x|\,dx\right) \text{ by prop. ③}$$

Now

$$\int_0^4 3\,dx = \text{Area}\Big($$ 

$$\Big) = 3(4-0) = 12$$

$$\int_0^4 |x|\,dx = \text{Area}\Big($$ 

$$\Big) = \frac{b\cdot a}{2} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8$$

Then:

$$\int_{-4}^{4}\left(3-\frac{1}{2}|x|\right)dx = 2\left(12+\left(-\frac{1}{2}\right)8\right) = 2(12-4)$$

$$\boxed{\int_{-4}^{4}\left(3-\frac{1}{2}|x|\right)dx = 16}$$

④ We want to compute: $\int \left(1-\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{t}{4}\right) dt$.

Observe that:

$$\sin\left(\frac{t}{4}\right) = 4 \frac{d}{dt}\left(1-\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right).$$

$$= 4\int \left(1-\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right)^2 \frac{d}{dt}\left(1-\cos\frac{t}{4}\right) dt.$$

Using the change of variables $u(t) = 1-\cos\frac{t}{4}$:

$$= 4\int u^2(t)\, \frac{du}{dt}(t)\, dt.$$

and by the Change of variables Theorem

$$= 4\int u^2\, du = \frac{4}{3}u^3 + C$$

Hence, going back to the original variable x:

$$\boxed{\int \left(1-\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right)^2 \left(\sin\left(\frac{t}{4}\right)\right) dt = \frac{4}{3}\left(1-\cos\frac{t}{4}\right)^3 + C}$$

Do not forget the integration constant

5) We are asked to find $\int x^2 e^{x/2}\,dx$

We have to integrate by parts twice:

$$\int x^2 e^{x/2}\,dx = \int x^2 (2e^{x/2})'\,dx$$

Parts

$$\stackrel{\downarrow}{=} x^2(2e^{x/2}) - \int (x^2)'(2e^{x/2})\,dx$$

$$= x^2(2e^{x/2}) - \int (2x)(2e^{x/2})\,dx$$

$$= x^2(2e^{x/2}) - \int (2x)(4e^{x/2})'\,dx$$

Parts

$$\downarrow$$

$$= x^2(2e^{x/2}) + (-2x)(4e^{x/2}) - \int (-2x)'(4e^{x/2})\,dx$$

$$= x^2(2e^{x/2}) + (-2x)(4e^{x/2}) + 2\int 4e^{x/2}\,dx$$

$$= x^2(2e^{x/2}) + (-2x)(4e^{x/2}) + 2\int (8e^{x/2})'\,dx$$

$$= x^2\, 2e^{x/2} + (-2x)\, 4e^{x/2} + 16e^{x/2} + C$$

Do not forget the integration constant

$$\boxed{\int x^2 e^{x/2}\,dx = (2x^2 - 8x + 16)e^{x/2} + C}$$

5

⑥ Lo que Gottlieb nos da diariamente son los casos nuevos confirmados $I'(t)$. Si sumamos (integramos) todos esos casos confirmados después de T días de epidemia, tenemos el número total de infecciones al día T, $I(T)$.

Por otra parte, por el Teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_0^T I'(t)\,dt = I(T) - T(0)$$

Pero el día cero, no hay infectados: $I(0)=0$

Entonces, $$\int_0^T I'(t)\,dt = I(T).$$

que coincide con nuestro argumento anterior!