UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2021
CÁLCULO DIFERENCIAL
EXAMEN # ~~3 (FORMA~~ A REMOTA).
PARTE I.
FECHA: VIERNES 15 DE OCTUBRE DE 2021
HORA 16:00. ENTREGA: DE 17:30 A 18:00 HORAS

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **SEIS** problemas con diferentes puntajes.
- Esta Parte I vale 65 puntos.
- Para tener derecho a la Parte II, deben resolver esta parte y entregarla a tiempo.

- Disponen de **una** hora y media (**90 minutos**) para resolverlos: **de 16:00 a 17:30 horas**.
- Tienen 30 minutos adicionales para subir su examen al *Google Classroom*: **hasta las 18:00 h**
- El examen es **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- Para recibir puntaje: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PARTE I: Problemas

No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) Considere la función $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.
   (a) (**5 puntos.**) Determine $\mathrm{Dom}(f)$.
   (b) (**5 puntos.**) Determine $f^{-1}(y)$, $\mathrm{Dom}(f^{-1})$ y $\mathrm{Ran}(f^{-1})$.
   (c) (**5 puntos.**) Usando el Teorema de la función inversa, determine $\dfrac{df^{-1}}{dy}$ en el punto $y = 5 = f(2)$ (*i.e.*, para $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(5) = 2$).

(2) (**10 puntos.**) Calcule la derivada de $y(\theta) = e^{\cos\theta + \ln\theta}$.

(3) (**10 puntos.**) Calcule la derivada de $y(t) = \ln(\sec(\ln t))$.

(4) (**10 puntos.**) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(1-\cos t)}{t - \sin t}$.

(5) (**10 puntos.**) Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 de la siguiente función alrededor del punto $x = 0$ (es decir, el polinomio de Maclaurin).

$$f(x) = \frac{40}{20+5x}.$$

(6) (**10 puntos**) Resuelva la ecuación $\ln\left(\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1-x}{x}\right]\dfrac{e^{x^2}}{e^{x}}\right) = -2(1-x)$. (*Pista*: Primero simplifique. Este problema es muy sencillo, pero debe simplificar primero).

UAM-Azcapotzalco | Cálculo Diferencial | Viernes, Octubre 15, 2021

Examen #3 - Parte I. Answer Key.

(1) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

(a) We require $x-1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

(b). $y = f(x) = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow (x-1)y = x+3$:

$xy - x = y+3 \Rightarrow x(y-1) = y+3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{y-1}$

$\Rightarrow \boxed{x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-1}}$ $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Then $\mathrm{Ran}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$

$= \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(c) The Theorem says:

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=5} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$$

If $y=5$ and $y = f(2) \Rightarrow x = 2$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \frac{-4}{(2-1)^2} = -4$$

$$\boxed{\frac{df^{-1}}{dy}(5) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.}$$

(2) $\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} e^{(\cos\theta + \ln\theta)} = e^{(\cos\theta+\ln\theta)} \frac{d}{d\theta}(\cos\theta + \ln\theta)$

Chain rule.

$= \left(-\sin\theta + \frac{1}{\theta}\right) e^{\cos\theta + \ln\theta}$

---

(3) We use the Chain rule twice:

$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\log\left(\sec\left(\log t\right)\right)\right) = \frac{1}{\sec(\log t)} \frac{d}{dt}\left(\sec(\log t)\right)$

Chain

$= \frac{1}{\sec(\log t)} \sec(\log t) \tan(\log t) \cdot \frac{d}{dt}(\log t).$

Chain.

$$\boxed{= \frac{\tan(\log t)}{t}.}$$

---

(4). $\lim_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t - \sin t}$ is of the form: "$\frac{0}{0}$"

We can use L'Hôpital.

$= \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos t) + t\sin t}{1-\cos t}$, again "$\frac{0+0}{0} = \frac{0}{0}$".

Again, L'Hôpital

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\sin t + \sin t + t\cos t}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin t + t\cos t}{\sin t}$$ of the form "$\frac{0}{0}$"

Again L'Hôpital:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos t + \cos t + t(-\sin t)}{\cos t}$$

Notice denominator $= \cos t \longrightarrow 1$. We can then evaluate the limit:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3\cos t + (-t\sin t)}{\cos t}$$

$$= \frac{3 + 0}{1} = 3$$

Method ② We found.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t + t\sin t}{1-\cos t}\right)$$

L'Hôpital

$$= \lim_{t\to 0}\left(1 + \frac{t\sin t}{1-\cos t}\right)$$

$$= 1 + \lim_{t\to 0} \frac{t\sin t}{1-\cos t}$$ is of the form "$\frac{0}{0}$"

$$= +\lim_{t\to 0} \frac{\sin t + t\cos t}{\sin t} = 1 + \lim_{t\to 0}\left(1 + \frac{t\cos t}{\sin t}\right)$$

L'Hôpital

$$= 1 + 1 + \lim_{t\to 0}\left(\frac{t\cos t}{\sin t}\right) = 2 + \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)}.$$

$$= 2 + \frac{1}{1} = 3$$ Same result!

<u>Method</u> 3 Taylor's series about $t=0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\left(1-\left[1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right]\right)}{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\frac{t^2}{2} - t^4/4! + \cdots\right)}{t^3/3! - t^5/5!} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3\left(1/2 - t^2/4! + \cdots\right)}{t^3\left(1/3! - t^2/5!\right)}.$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1/2 - t^2/4! + \cdots}{1/3! - t^2/5!} = \frac{1/2}{1/3!} = \frac{3!}{2}$$

$$= 3$$ Same result!.

(5) Taylor's polynomial of degree 3 of the function:

$$f(x) = \frac{40}{20+5x} = \frac{40}{20(1+\frac{5}{20}x)} = \frac{2}{(1+x/4)} = \frac{2}{1+z}$$

$z = x/4$

$$= \frac{2}{1-(-z)} = 2\left(1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+\cdots\right.$$

$$= 2\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{64}+\cdots\right).$$

Using derivatives:

$$f(x) = \frac{40}{(20+5x)} \qquad f(0) = \frac{40}{20} = 2$$

$$f'(0) = \frac{-40\cdot 5}{(20+5x)^2} \qquad f'(0) = -\frac{40\cdot 5}{20^2} = -\frac{2}{4} = -1/2$$

$$f''(\cancel{x}) = \frac{(-1)(-2)\,40\cdot 5\cdot 5}{(20+5x)^3} \qquad f''(0) = \frac{2\cdot 40\cdot 25}{(20)^3} = \frac{2\cdot 2}{32} = 1/4$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)\,40\cdot 5\cdot 5\cdot 5}{(20+5x)^4} \qquad f'''(0) = \frac{-2\cdot 3\cdot 40\cdot 125}{20^4} = -3/16$$

Then: $f(x) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} - \frac{3}{3!}\frac{x^3}{16} + \cdots$

$$\boxed{f(x) \approx 2 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{32} + \cdots}$$

Same result.

$= S_3$

⑥ Solve the eq'n: $\log\left(\left[\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x}\right]\frac{e^{x^2}}{e^x}\right) = -2(1-x)$

This is equivalent to:

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x}\right]\frac{e^{x^2}}{e^x} = e^{-2(1-x)},$$

since $\log(x)$ and $\exp(x)$ are inverse functions to each other:

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x}\right] e^{x^2-x} = e^{2x-2}$$

$$[0+1]\, e^{x^2-x}\, e^{-2x+2} = 0 \cdot 1.$$

$$e^{x^2-3x+2} = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = \log(1)$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

Then, the solutions are $\boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2021
CÁLCULO DIFERENCIAL
EXAMEN # 3 (FORMA REMOTA).
PARTE II.
FECHA DE ENTREGA: SÁBADO 16 DE OCTUBRE DE 2021
HORA DE ENTREGA: ANTES DE LAS 23:59 HORAS

Nombre: ANSWER KEY

- El examen consta de **SEIS** problemas con diferentes puntajes.
- Esta Parte II vale 35 puntos.

- El examen es **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- Para recibir puntaje: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PARTE II: Problemas

No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) (**5 puntos.**) Encuentre la derivada de $f(\theta) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$

(2) (**5 puntos.**) Encuentre el límite. $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos\left(\dfrac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}\right)$.

(3) (**5 puntos.**) Calcule la derivada de $f(x) = \ln(x^2+1) - x\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

(4) (**5 puntos.**) Calcule la derivada de la siguiente función. (Esta función sí tiene dominio, es **R**, y es positiva para todos los valores de x).

$$g(x) = \frac{e^{-x^2}\sqrt{x^2+1}\tan^2(x)}{2x^2+2x+4}$$

No 6.

(5) (**5 puntos.**) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x2^x}{2^x-1}$.

(6) (**10 puntos.**) El objetivo de este problema es graficar la función $g(x) = x\ln x$. Determine:
(a) su dominio, ceros (raíces) y simetrías,
(b) ecuaciones de sus asíntotas,
(c) puntos críticos,
(d) intervalos de monotonía,
(e) intervalos de concavidad,
(f) puntos de inflexión,
(g) valores extremos.
(h) haga un esbozo de la gráfica de la función.

UAM-Azcapotzalco $\boxed{\text{Cálculo Diferencial}}$ Viernes Octubre 15, 2021

Examen #3 - Parte II Answer Key

(1) $$\frac{d}{d\theta}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)^2}\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos\theta}\left(\sqrt{1-\cos\theta}\right)'-\sqrt{1-\cos\theta}\left(\sqrt{1+\cos\theta}\right)'}{\left(\sqrt{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos\theta}\,\frac{\sin\theta}{2\sqrt{1-\cos\theta}}-\sqrt{1-\cos\theta}\,\frac{(-\sin\theta)}{2\sqrt{1+\cos\theta}}}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)}\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}\,\sin\theta}{2\sqrt{1-\cos\theta}}+\frac{\sqrt{1-\cos\theta}\,\sin\theta}{2\sqrt{1+\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}\,\frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}}+\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta}{2}\,\frac{\left(\sqrt{1+\cos\theta}\right)^2+\left(\sqrt{1-\cos\theta}\right)^2}{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{4}\,\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{4}\,\frac{2}{\sqrt{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}\Rightarrow\boxed{\frac{d}{d\theta}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)=\pm\frac{1}{2}}$$

=1=

② We want to compute $\ell = \lim_{x\to\infty} \operatorname{Arccos}\left(\frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}\right)$.

To this end, apply $\cos(\theta)$ on each side, and since cosine is a continuous function

$$\cos \ell = \cos \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}$$, since cos and Arccos are inverse functions

We can use L'Hôpital or factor out e^{2x}.

(A) If we use L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+e^{2x})'}{(1+2e^{2x})'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(A) If we factor e^{2x}

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}(e^{-2x}+1)}{e^{2x}(e^{-2x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

Then, $\cos \ell = \frac{1}{2}$. Then, $\boxed{\ell = \frac{\pi}{3}}$

③ $$\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Log}(x^2+1) - x\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{3}\right)\right).$$

$$= \frac{1}{1+x^2}(x^2+1)' - \left[1\cdot\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + x\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\right]$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} - \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + x\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'\right].$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} - \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right].$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{4x}{4+x^2}$$

i.e.

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2x}{4+x^2}}$$

---

④ $$g(x) = \frac{e^{-x^2}\sqrt{1+x^2}\,\tan^2(x)}{2x^2+2x+4}. =$$

We need logarithmic differentiation:

$$\operatorname{Log}(g) = \operatorname{Log}\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x^2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\tan^2 x}{x^2+x+1.}\right)$$

$$= \operatorname{Log}\frac{1}{2} + \operatorname{Log}(e^{-x^2}) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + 2\operatorname{Log}(\tan x)$$
$$- \operatorname{Log}(x^2+x+1)$$

The derivatives on the Left-Hand-Side: by Chain Rule: $\frac{d}{dx}\operatorname{Log}(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$= 3 =$

On the Right-Hand-Side:

$$\frac{d}{dx}\left[\log\left(\frac{1}{2}\right) + (-x^2)\underbrace{\log(e)}_{=1} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \log(\tan x) - \log(x^2+x+1)\right]$$

$$= 0 + (-2x)\cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

$$= -2x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Then:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -2x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\cos x \sin x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{e^{-x^2}\sqrt{1+x^2}\,\tan^2(x)}{2x^2+2x+4}\left(-2x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\cos x \sin x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)}$$

(5) We need $\frac{d}{dx}(2^x) = \log(2)\,2^x$, computed in class and in text.

Then: $\lim_{x\to 0} \frac{x\,2^x}{2^x-1}$ is of the form "$\frac{0}{0}$": Use L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x\,2^x)'}{(2^x-1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot 2^x + x\log(2)\,2^x}{(\log 2)\,2^x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+(\log 2)x)\cancel{2^x}}{(\log 2)\,\cancel{2^x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+(\log 2)x}{\log 2}\right) = \boxed{\frac{1}{\log 2}}$$

⑥ Sketch the graph of $g(x) = x \ln x$.

(a) <u>Domain</u>: $Dom(g) = (0, \infty)$, because $Dom(\ln) = (0, \infty)$

$g(x) = 0 \Rightarrow x \ln x = 0$.

<u>Roots</u> (a) $x \neq 0$, so $x = 0$ is not a root

(b) $\ln x = 0$, if $x = 1$ is the only root

<u>Symmetries</u>

It is not symmetric (not even, nor odd), and it is not <u>periodic</u>

(b) Asymptotes.

(i) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ is "$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hôpital

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1/x}{-1/x^2} \right) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{x} =)$$

$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$. Thus, $x = 0$ is <u>not</u> an asymptote.

(ii) $\lim_{x \to \infty} x \ln x = \infty$.

It does <u>not</u> have asymptotes.

(c) Critical points. The domain $(0, \infty)$ has no boundaries.

Then: Critical points at $g'(x) = 0$ or $g'(x)$ not exists.

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

This function exists on $(0, \infty)$, then $g'(x)$ always exists.

Then $g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = e^{-1}}$ is the only one critical point.

$x_0 \approx 0.3678$

(d) Since $\underset{= \ln x + 1}{g'(x)}$ is continuous on $(0, \infty)$,

Then take sample points:

$x_1 = e^{-2} < \underset{= x_0}{e^{-1}}$: $g'(e^{-2}) = \ln(e^{-2}) + 1 =$
(Left) $= -2 + 1 = -1 < 0.$

$x_2 = e^{-1/2} > e^{-1} = x_0$; $g'(e^{-1/2}) = \ln(e^{-1/2}) + 1$
(Rigth). $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$

Then, if $x < x_0$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow$. decreasing
if $x > x_0$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow$. increasing

This means that : $g(x_0)$ is a global minimum.

$$(x_0) = x_0 \ln x_0 = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1} \ln e$$

$$= -e^{-1} \approx -0.3678.$$

(e) Concavity. We need the 2nd derivative.

$$\frac{d^2}{dx^2}(x \ln x) = \frac{d}{dx}(\ln x + 1) = \frac{1}{x} > 0, \text{ always}$$

since $x \in (0, \infty)$

Then, the curve is always concave up.

(f). There is no inflection points, since.

there is no change in concavity.

(g) Since $g(x)$ is always concave up and

$$g'(e^{-1}) = 0,$$

then $g(e^{-1})$ is a local minimum,

which turns to be a global minimum, by

continuity

Last observation. $g(x) = x \ln x$: $x > 0$ for $x \in (0, \infty)$

and $\ln x < 0$ in $(0,1)$, and $\ln x > 0$, for $x \in (1, \infty)$

Then $g(x) < 0$ in $(0,1)$ and $g(x) > 0$, for $x \in (1, \infty)$

We can now sketch the graph of $g(x) = x \ln x$.