UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: PRIMAVERA 2021
CÁLCULO INTEGRAL
EXAMEN # 3 (FORMA REMOTA).
FECHA: VIERNES 15 DE OCTUBRE DE 2021.
HORA 14:30. HORA DE ENTREGA: 16:00 A 16:30

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **TRES** problemas con diferentes puntajes.
- Disponen de **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos: **de 14:30 a 16:00 horas.**
- Tienen 30 minutos adicionales para subir su examen al *Google Classroom*: **hasta las 16:30 h**
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(0) No olvide elaborar la carátula del examen y anexarla con su examen escaneado.

(1) **(30 puntos)** Encuentre el área entre las curvas $y = \cos x$ y $y = (\sec^2 x)/8$.

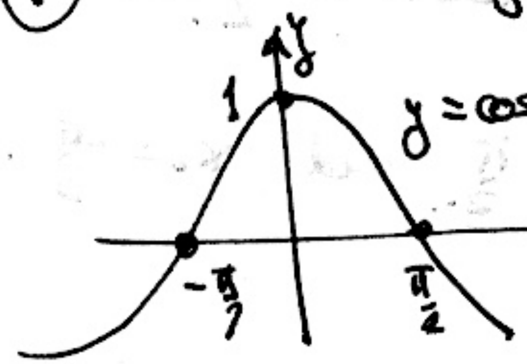
(2) **(35 puntos)** Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana acotada (bordeada) por las curvas $x = y^2/4$ y $y = 2x^2$ alrededor de la recta $x = 1$.

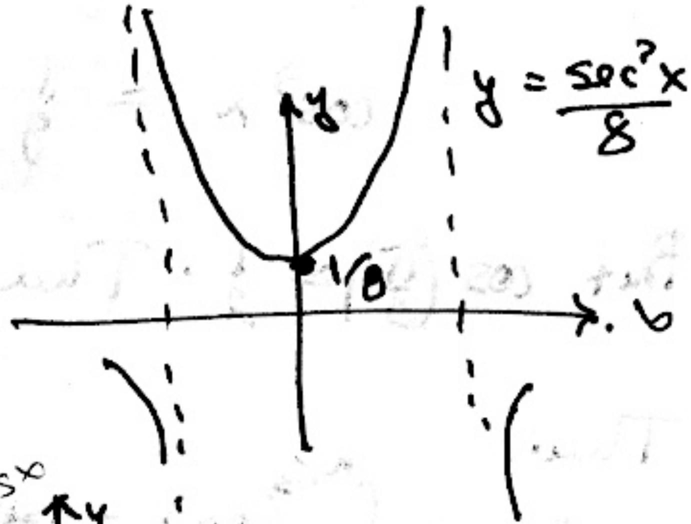
(3) **(35 puntos)** Un resorte tiene longitud natural de 20 cm. En equilibrio, tiene una longitud de 30 m con una fuerza de 25 Newtons. ¿Cuánta energía se necesita para estirarlo de 20 a 25 cm?

UAM-Azcapotzalco. $\boxed{\text{Cálculo Integral}}$ Viernes, Octubre 15, 2021

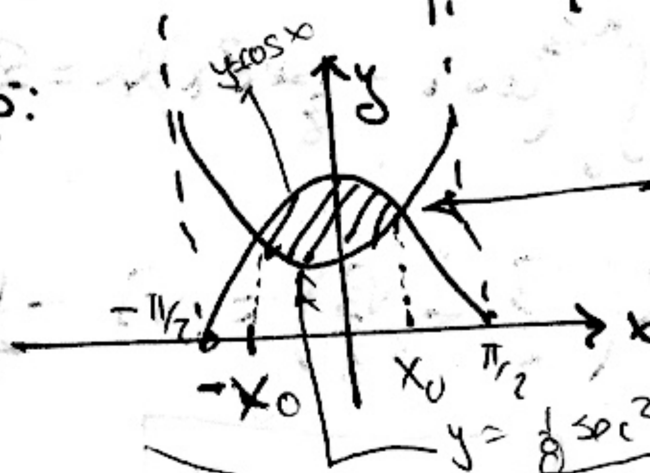
Examen #3. Solution Key

(1) We have the graphs:





If we overlap:



We have to find this area: A:

$$A = \int_{-x_0}^{x_0} \left(\cos x - \frac{1}{8}\sec^2 x\right) dx = 2\int_0^{x_0} \left(\cos x - \frac{1}{8}\sec^2 x\right) dx$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{1}{8}\tan x\right)\Big|_0^{x_0}$$ by the Fundamental Theorem of Calculus.

$$= 2\left(\sin x_0 - \frac{1}{8}\tan x_0\right),$$ since $\sin(0) = \tan 0 = 0$

Then, it remains to find x_0:

We find it by solving the equation $y=y$, i.e.:

$$\cos x = \frac{1}{8}\sec^2 x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}.$$

But $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Then $x_0=\frac{\pi}{3}$ and $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

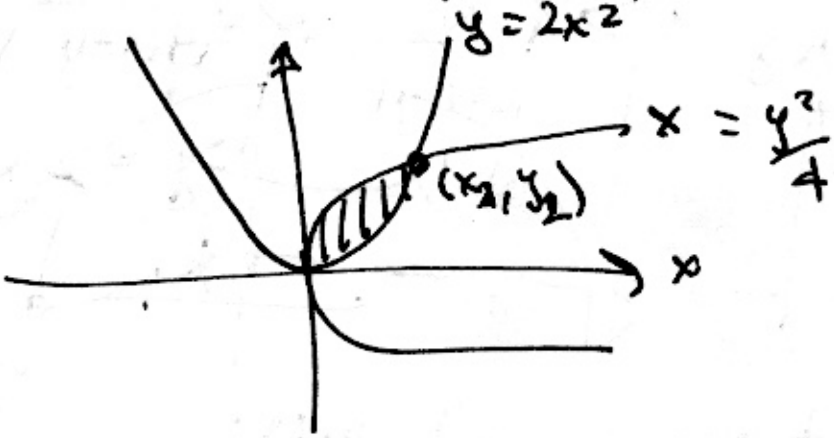
Then

$$A = 2\int_0^{\pi/3}\left(\cos x - \frac{1}{8}\sec^2 x\right)dx = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{8}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{Area} = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

② We have two parabolas that intersect:



They clearly intersect at $(0,0)$ and at a point (x_2, y_2) to be determined: We know:

$$y = 2x^2 = 2\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 2\frac{y^4}{16} = \frac{1}{8}y^4$$

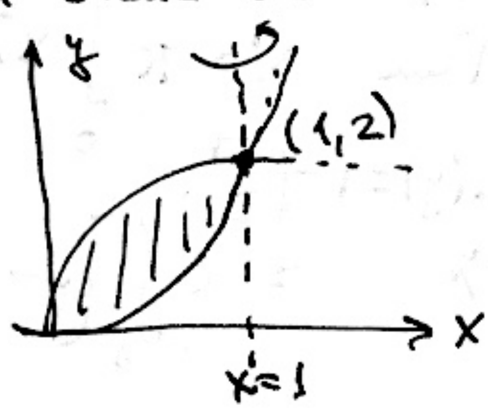
$$\Rightarrow \quad y^4 - 8y = 0 \quad \Rightarrow (y^3 - 8)y = 0$$

Then $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1^2/4 = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (0,0)$ (already found)

$y_2 = 2. \Rightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{4} = \frac{(2)^2}{4} = 1.$

$$\Rightarrow \quad (x_2, y_2) = (1, 2)$$

Then, this region should be rotated about the $x = 1$ axis



Notice that parabola $x = \frac{y^2}{4}$ we can only take the upper part $y = \sqrt{4x}$ (Not $y = -\sqrt{4x}$)

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{y^4}{16} - \frac{2}{4}y^2 + 1\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{y} + \frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{y} \; dy$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5 \cdot 16} y^5 - \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 - \frac{1}{2 \cdot 2} y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Bigg|_0^2$$

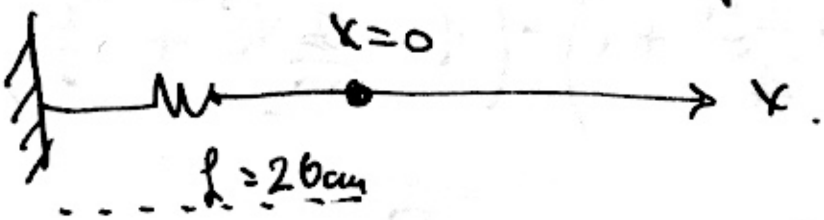
$$= \pi \left(\frac{2^5}{5 \cdot 2^4} - \frac{2^3}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2^2} 2^2 + \frac{2^2}{3\sqrt{2}} \underbrace{(2\sqrt{2})}_{2^{3/2}} \right)$$

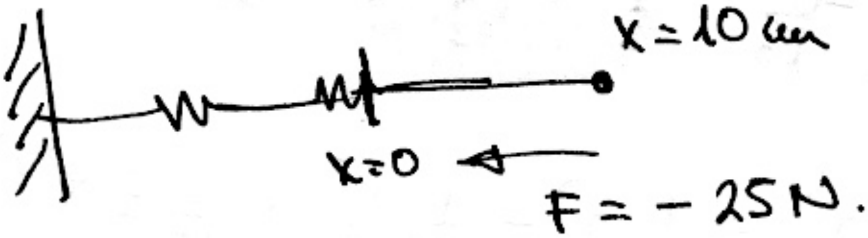
$$= \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} - 1 + \frac{2^3}{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - 1 \right) = \pi \left(\frac{6 + 20}{15} - 1 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{6 + 20 - 15}{15} \right) = \boxed{V = \frac{11\pi}{15}}$$

③ · We take 20 cm to correspond to $x=0$





We use this info to find Hooke's constant.

But we need $x = \frac{1}{10}$ m. Then, Hooke's law.

$$|F| = k|x| \Rightarrow k = \frac{|F|}{|x|} = \frac{25\,N}{1/10\,m}$$

$$\boxed{k = 250\ N/m}$$

To stretch the spring from: 20 to 25 cm,
we have to move it from 0 to $5\,cm = \frac{5}{100}\,m$

Then

$$W = \int_0^{5/100} F(x)\,dx = \int_0^{5/100} kx\,dx = \frac{k}{2}x^2\Big|_0^{5/100}$$

$$= \frac{250}{2}\,\frac{5^2}{(100)^2}\ \text{Joules} = \frac{25^2\cdot 10}{2\cdot 10^4}\ J = 0.3125\ J.$$