UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO DIFERENCIAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021. PEER

EXAMEN # 1. - A
FECHA: VIERNES 3 DE DICIEMBRE DE 2021.
DE 14:30 A 16:00 HORAS. ENTREGA: 16:00 A 16:30 HORAS

Nombre: Answer Key - type A exams.

**Instrucciones:**

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

## PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Diga qué ingeniería está estudiando. Con sus propias palabras, describa un problema en su ingeniería que involucre derivadas, es decir, que involucre cambios de una variable respecto de la otra. Defina bien esas variables y diga, *grosso modo*, cómo se relacionan.

(2) Calcule la derivada de

(a) **(10 puntos.)** $f(x) = \dfrac{x^2+5x-1}{\tan x}$.

(b) **(10 puntos.)** $F(x) = \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{x^2+1}{\cos x}$.

(3) (a) **(10 puntos.)** Usando la definición de derivada, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado:

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x = 3.$$

(b) **(10 puntos.)** Calcule la linealización de la función anterior en el mismo punto.

(4) **(20 puntos.)** La ley de van der Waals para un gas est dada por:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

$V$ = volumen, $P$ = presión, $T$ = temperatura y $n$ = número de moles. Las cantidades $a, b$ son constantes positivas que dependen del gas en cuestión y $R$ es la constante universal de los gases. Suponga que $P$ y $T$ permanecen constantes. Calcule $\dfrac{dV}{dn}$.

(5) **(20 puntos.)** Dadas $f(x) = \tan(2x)$, y $g(x) = \sqrt{x}$

(a) escriba $F(x) = x(f \circ g)(x) + 5^3$.

(b) calcule la derivada de $F$.

UAM- AZCAPOTZALCO | Examen #1 | Viernes, Diciembre 3, 2021

CÁLCULO DIFERENCIAL    ANSWER KEY

---

(1). The answer for this questions depends on the Engineering you are studying.

---

Physical E.- If you have a device that produce energy, and you let the device move, then the energy is a function of time. $E = f(t)$

---

Chemical E. Environmental E.

Say a Chemical is produce in the atmosphere. (it could be a pollutant). This production depends on the availability of a Reactant to produce the chemical.

Then, the Chemical is a function of the amount of the Reactant: $C = f(R)$

---

Industrial E. The production of an item cost an amount of money. In "mayoreo", the costs result cheaper. Then, the cost, C, is a function of the amount, x, of items produced:

$$C = f(x).$$

② (a) $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+5x-1}{\tan x}\right) = \frac{(\tan x)(2x+5) - (x^2+5x+1)\sec^2 x}{\tan^2 x}$

(b) $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x} + \frac{x^2+1}{\cos x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{\cos x}\right)$

$= \frac{-x\sin x - 1\cdot\cos x}{x^2} + \frac{(\cos x)2x + (x^2+1)\sin x}{\cos^2 x}$

---

③ First, compute the derivative:

$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1})}{h}\frac{(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \lim \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}}$

Then $\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

The slope of the tangent line at $x=3$ is $m = \frac{df}{dx}(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$

Then, at $x_0 = 3$, $y_0 = f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

$m = 1/4$.

Equation of the tangent line becomes: $\boxed{y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)}$

or $y - 2 = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ $\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$ Then $\boxed{y = L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$ is the linearization.

$= 2 = A =$

④ Here, we assume $V = V(n)$, and we compute the derivative with respect to $n$ on each member of the equation.

$$\frac{d}{dn}\left[\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb)\right] = \frac{d}{dn}(nRT)$$

By product rule:

$$\left[\frac{d}{dn}\left(P + n^2 a V^{-2}\right)\right](V-nb) + \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\frac{d}{dn}(V - nb) = RT$$

$$\left[0 + 2naV^{-2} - 2n^2aV^{-3}\frac{dV}{dn}\right](V-nb) + \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{dV}{dn} - b\right) = RT.$$

Grouping $\frac{dV}{dn}$:

$$\left[-2n^2aV^{-3}(V-nb) + \left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)\right]\frac{dV}{dn} + \frac{2na}{V^2}(V-nb) - b\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) = RT.$$

i.e.

$$\left[\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) - \frac{2n^2a}{V^3}(V-nb)\right]\frac{dV}{dn} = RT + b\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) - \frac{2na}{V^2}(V-nb)$$

Finally,

$$\boxed{\frac{dV}{dn} = \frac{RT + b\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) - \frac{2na}{V^2}(V-nb)}{\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) - \frac{2n^2a}{V^3}(V-nb)}}$$

⑤ (a) We have to write the composite function of $f$ and $g$,

$f(x) = \tan(2x)$, $g(x) = \sqrt{x}$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \tan(2\,g(x)) = \tan(2\sqrt{x})$$

Hence

$$F(x) = x\,(f \circ g)(x) + 5^3$$
$$= x \tan(2\sqrt{x}) + 5^3$$

(b) To compute $F'$, we require the product and chain rule.

$$F'(x) = \frac{dx}{dx}\tan(2\sqrt{x}) + x\frac{d}{dx}\left(\tan(2\sqrt{x})\right) + \frac{d}{dx}5^3$$
$$= 1\cdot\tan(2\sqrt{x}) + x\sec^2(2\sqrt{x})\,\frac{d(2\sqrt{x})}{dx} + 0$$
$$= \tan(2\sqrt{x}) + x\sec^2(2\sqrt{x})\,2\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$$

Hence

$$\boxed{F'(x) = \tan(2\sqrt{x}) + \sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x})}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO DIFERENCIAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021. PEER

EXAMEN # 1. ~B
FECHA: VIERNES 3 DE DICIEMBRE DE 2021.
DE 14:30 A 16:00 HORAS. ENTREGA: 16:00 A 16:30 HORAS

Nombre: ANSWER KEY — Type B exam.

**Instrucciones:**

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

## PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Diga qué ingeniería está estudiando. Con sus propias palabras, describa un problema en su ingeniería que involucre derivadas, es decir, que involucre cambios de una variable respecto de la otra. Defina bien esas variables y diga, *grosso modo*, cómo se relacionan.

(2) Calcule la derivada de

 (a) **(10 puntos.)** $g(x) = \dfrac{x+6}{\cos x}$.

 (b) **(10 puntos.)** $G(x) = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{1-x^3}{\sin x}$.

(3) (a) **(10 puntos.)** Usando la definición de derivada, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado:

$$g(x) = (7+x)^{-1}, \quad x = -5.$$

 (b) **(10 puntos.)** Calcule la linealización de la función anterior en el mismo punto.

(4) **(20 puntos)**. Una ley de *seudo*-gases involucra la presión ($P$), el volumen ($V$) y la temperatura ($T$) de un gas y las relaciona de la siguiente manera:

$$P(V^2 - \sqrt{V}) = kT - aV$$

en donde $k$ es una *seudo*-constante de Boltzman y $a$ es otra constante que depende del gas en cuestión. Si la temperatura $T = T_0$ es constante, calcule la razón de cambio del volumen cuando cambia la presión.

(5) **(20 puntos.)** Dadas $f(x) = \sqrt{x}$, y $g(x) = 7 + \dfrac{x}{\cos x}$

 (a) escriba $G(x) = x(f \circ g)(x) + 5^3$.

 (b) calcule la derivada de $G$.

UAM- AZCAPOTZALCO | Examen #1 | Viernes, Diciembre 3, 2021

CÁLCULO DIFERENCIAL    ANSWER KEY

---

(1). The answer for this questions depends on the Engineering you are studying.

---

Physical E.. If you have a device that produce energy, and you let the device move, then the energy is a function of time. $E = f(t)$

---

Chemical E. Environmental E.

Say a Chemical is produce in the atmosphere. (it could be a pollutant). This production depends on the availability of a Reactant to produce the chemical.

Then, the Chemical is a function of the amount of the Reactant: $C = f(R)$

---

Industrial E. The production of an item cost an amount of money. In "mayoreo", the costs result cheaper. Then, the cost, C, is a function of the amount, x, of items produced:

$$C = f(x).$$

(2) $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{1-x^3}{\sin x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^3}{\sin x}\right)$

$$= \frac{x(\sin x)' - (x)'\sin x}{x^2} + \frac{\sin x(1-x^3)' - (1-x^3)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{-3x^2\sin x - (1-x^3)\cos x}{\sin^2 x}$$

---

(a) $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+6}{\cos x}\right) = \frac{\cos x(x+6)' - (x+6)(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos x + (x+6)\sin x}{\cos^2 x}$$

---

(3) We need to compute the derivative. We need first

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(7+x+h)^{-1} - (7+x)^{-1}}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{7+x+h} - \frac{1}{7+x}\right) = \frac{1}{h}\,\frac{(7+x)-(7+x+h)}{(7+x+h)(7+x)}$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{-h}{(7+x+h)(7+x)} = \frac{-1}{(7+x+h)(7+x)}$$

Then:

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(7+x+h)(7+x)}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-1}{(7+x)^2}}$$

We want the tangent line at the point on the graph..

$$(x_0, y_0) = (x_0, g(x_0)) = (-5, f(-5)) = \left(-5, \frac{1}{7-5}\right)$$

$$(x_0, y_0) = \left(-5, \frac{1}{2}\right)$$

=5=

The slope of the tangent line at this point is:

$$m = \frac{dg}{dx}(-5) = -\frac{1}{(7-5)^2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

The equation of the tangent line is

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{4}\right)(x-(-5)).$$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x+5)}$$

(b) Write the eq'n is y-intercept form:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

Then, the linearization is:

$$\boxed{L(x) = -\left(\frac{x+3}{4}\right)}$$

---

(4) Here, $k$, $T$ are constants and $V = V(P)$.

We need implicit differentiation.

$$\frac{d}{dP}\left(P\left(V^2 - \sqrt{V}\right)\right) = \frac{d}{dP}(kT - aV).$$

$$\frac{dP}{dP}\left(V^2 - \sqrt{V}\right) + P\frac{d}{dP}\left(V^2 - \sqrt{V}\right) = 0 - a\frac{dV}{dP}.$$

$$V^2 - \sqrt{V} + P\left(2V - \frac{1}{2\sqrt{V}}\right)\frac{dV}{dP} = -a\frac{dV}{dP}$$

$$P\left(2V-\frac{1}{2\sqrt{V}}+\frac{a}{P}\right)\frac{dV}{dP} = \sqrt{V}-V^2$$

$$\boxed{\frac{dV}{dP} = \frac{\sqrt{V}-V^2}{P\left(2V-\frac{1}{2\sqrt{V}}+\frac{a}{P}\right)}}$$

5 (a). We need to compute first: $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ $= \sqrt{g(x)} = \sqrt{7+\frac{x}{\cos x}}$. Then:

$$\boxed{G(x) = x\sqrt{7+\frac{x}{\cos x}} + 5^3}$$

(b) We now compute the derivative using the Chain Rule:

$$\frac{dG}{dx} = 1\cdot\sqrt{7+\frac{x}{\cos x}} + x\,\frac{1}{2\sqrt{7+\frac{x}{\cos x}}}\,\frac{d}{dx}\left(7+\frac{x}{\cos x}\right) + 0$$

$$= \sqrt{7+\frac{x}{\cos x}} + \frac{x}{2\sqrt{7+x/\cos x}}\left(0+\frac{1\cdot\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\frac{dG}{dx} = \sqrt{7+\frac{x}{\cos x}} + \frac{x(\cos x + x\sin x)}{2\sqrt{7+\frac{x}{\cos x}}\,\cos^2 x}}$$

//

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

CÁLCULO DIFERENCIAL

TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021. PEER

**EXAMEN # 1.** – C

FECHA: **VIERNES 3 DE DICIEMBRE DE 2021.**

DE 14:30 A 16:00 HORAS. ENTREGA: 16:00 A 16:30 HORAS

Nombre: Answer Key – Type C exam.

**Instrucciones:**

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

## PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Diga qué ingeniería está estudiando. Con sus propias palabras, describa un problema en su ingeniería que involucre derivadas, es decir, que involucre cambios de una variable respecto de la otra. Defina bien esas variables y diga, *grosso modo*, cómo se relacionan.

(2) Calcule la derivada de

  (a) **(10 puntos.)** $h(x) = \dfrac{x^3+7}{\tan x}$.

  (b) **(10 puntos.)** $H(x) = \dfrac{\tan x}{x} + \dfrac{x}{\tan x}$.

(3) (a) **(10 puntos.)** Usando la definición de derivada, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado:

$$h(x) = (x-9)^{-1/2}, \quad x = 13.$$

  (b) **(10 puntos.)** Calcule la linealización de la función anterior en el mismo punto.

(4) **(20 puntos).** Una ley de *seudo*-gases involucra la presión ($P$), el volumen ($V$) y la temperatura ($T$) de un gas y las relaciona de la siguiente manera:

$$P^3\left(V - \frac{1}{V^3}\right) = kT - aV$$

en donde $k$ es una *seudo*-constante de Boltzman y $a$ es otra constante que depende del gas en cuestión. Si la temperatura $T = T_0$ es constante, calcule la razón de cambio del volumen cuando cambia la presión.

(5) **(20 puntos.)** Dadas $f(x) = x^3$, y $g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

  (a) escriba $H(x) = x(f \circ g)(x) + 5^3$.

  (b) calcule la derivada de $H$.

UAM- AZCAPOTZALCO | Examen #1 | Viernes, Diciembre 3, 2021

CÁLCULO DIFERENCIAL ANSWER KEY

---

(1). The answer for this questions depends on the Engineering you are studying.

---

Physical E.- If you have a device that produce energy, and you let the device move, then the energy is a function of time. $E = f(t)$

---

Chemical E. Environmental E.

Say a Chemical is produce on the atmosphere. (it could be a pollutant). This production depends on the availability of a Reactant to produce the chemical.

Then, the Chemical is a function of the amount of the Reactant: $C = f(R)$

---

Industrial E. The production of an item cost an amount of money. In "mayoreo", the costs result cheaper. Then, the cost, C, is a function of the amount, x, of items produced:

$$C = f(x).$$

(2) (a) $$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+7}{\tan x}\right) = \frac{(\tan x)(x^3+7)' - (x^3+7)(\tan x)'}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{3x^2 \tan x - (x^3+7)\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

(b) $$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x}{x} + \frac{x}{\tan x}\right) = \frac{\quad}{x^2}$$

$$= \frac{x(\tan x)' - (\tan x)x'}{x^2} + \frac{x' \tan x - x(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} + \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dx} = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\tan^2 x}\right)\sec^2 x + \left(\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)\tan x}$$

(3) We need to compute $h'(x)$. To this end:

$$h(x+\Delta x) - h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-9}} - \frac{1}{\sqrt{x-9}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-9} - \sqrt{x+\Delta x-9}}{\sqrt{x+\Delta x-9}\,\sqrt{x-9}} \cdot \frac{\sqrt{x-9}+\sqrt{x+\Delta x-9}}{\sqrt{x-9}+\sqrt{x+\Delta x-9}}$$

$$= \frac{(x-9) - (x+\Delta x-9)}{\sqrt{x+\Delta x-9}\,\sqrt{x-9}\left(\sqrt{x-9}+\sqrt{x+\Delta x-9}\right)}$$

$$= \frac{-\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x-9}\,\sqrt{x-9}\left(\sqrt{x-9}+\sqrt{x+\Delta x-9}\right)}$$

Then

$$\frac{dh}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+\Delta x-9}\,\sqrt{x-9}\left(\sqrt{x-9}+\sqrt{x+\Delta x-9}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x-9}\,\sqrt{x-9}\;2\sqrt{x-9}} = -\frac{1}{2(x-9)^{3/2}}$$

We must to compute the tangent line of the point

$$(x_0, y_0) = (x_0, h(x_0)) = (13, h(13)) = \left(13, \frac{1}{\sqrt{13-9}}\right) = \left(13, \frac{1}{2}\right)$$

We need the slope of $x_0 = 13$.

$$m = \frac{dh}{dx}(13) = \frac{-1}{2(13-9)^{3/2}} = -\frac{1}{2\cdot 4^{3/2}} = \frac{-1}{2\cdot 2^3} = \frac{-1}{16}.$$

Then, the equation of the tangent line is

$$y - y_0 = m(x - x_0) \;; \quad \boxed{y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{16}(x-13)}$$

(b) Now, in the y-intercept form: $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{16} + \frac{13}{16}.$

$$= -\frac{x}{16} + \frac{8+13}{16} = \frac{-x}{16} + \frac{21}{16}.$$

Then, the linearization is

$$\boxed{L(x) = \frac{-x}{16} + \frac{21}{16}}$$

④ We need implicit differentiation w.r.t. P, and $V = V(P)$:

$$\frac{d}{dP}\left(P^3\left(V - \frac{1}{V^3}\right)\right) = bT - aV$$

$$3P^2\left(V - \frac{1}{V^3}\right) + P^3\left(1 + \frac{3}{V^4}\right)\frac{dV}{dP} = 0 - a\frac{dV}{dP}$$

Put together $\frac{dV}{dP}$.

$$\left(P^3\left(1 + \frac{3}{V^4}\right) + a\right)\frac{dV}{dP} = 3P^2\left(\frac{1}{V^3} - V\right)$$

Then:

$$\frac{dV}{dP} = \frac{3P^2}{\left(P^3\left(1+\frac{3}{V^4}\right)+a\right)}\left(\frac{1}{V^3} - V\right)$$

$$\boxed{\frac{dV}{dP} = \frac{3P^2}{\left(P^3\left(V^4+3\right)+aV^4\right)}\left(1 - V^5\right)}$$

5 (a) $f(x) = x^3$ , $g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

We need:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$$

Then:

$$H(x) = x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 5^3$$

(b) Using the Chain rule: 40

$$\frac{dH}{dx} = 1\cdot\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 3x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 3x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 \frac{(1+\cos x)(\sin x)' - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 3x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 \frac{(1+\cos x)\cos x + (\sin x)^2}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 3x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + 3x\,\frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{(1+\cos x)^4}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dx} = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 + \frac{3x\,\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}}$$