UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO INTEGRAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021. PEER.

EXAMEN # 1.
FECHA: **LUNES 13 DE DICIEMBRE DE 2021: 16:00H.**
DE 16:00 A 17:30 HORAS. ENTREGA: 17:30 A 18:00 HORAS

Nombre: ANSWER KEY A

Instrucciones:

- El examen consta de **SIETE** problemas con diferentes puntajes.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje:** Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(10 puntos.)** Diga qué ingeniería está estudiando. Con sus propias palabras, describa un problema en su ingeniería que involucre integrales. Escriba la integral. Defina bien las variables dependientes e independientes y diga, *grosso modo*, qué representan. Diga cómo podría resolver el problema usando Cálculo Integral.

(2) **(20 puntos.)** La gráfica de la función $f(y)$ se muestra en la figura en el otro archivo pdf que se encuentra en la página de su examen. Defina la función:

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad \text{para} \quad x \in \cancel{[0,8[}\ [0,5].$$

¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de F? (De los valores en la forma $F(1)$, por ejemplo.)

(3) **(10 puntos.)** Utilice sumas de Riemann para estimar el área entre las curvas $y = 1 + x^2, x = 1, x = 3, y = 0$ usando cuatro rectángulos con igual base. Use la aproximación con puntos derechos.

(4) **(10 puntos.)** Evalúe la integral de $-\pi/4$ a $\pi/4$ de

$$f(x) = \left(5\sec^2 x + \frac{\log(2)x}{1+x^2}\right)$$

(5) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de $(\sqrt{x})^7\cos(x^{9/2} - \pi)$.

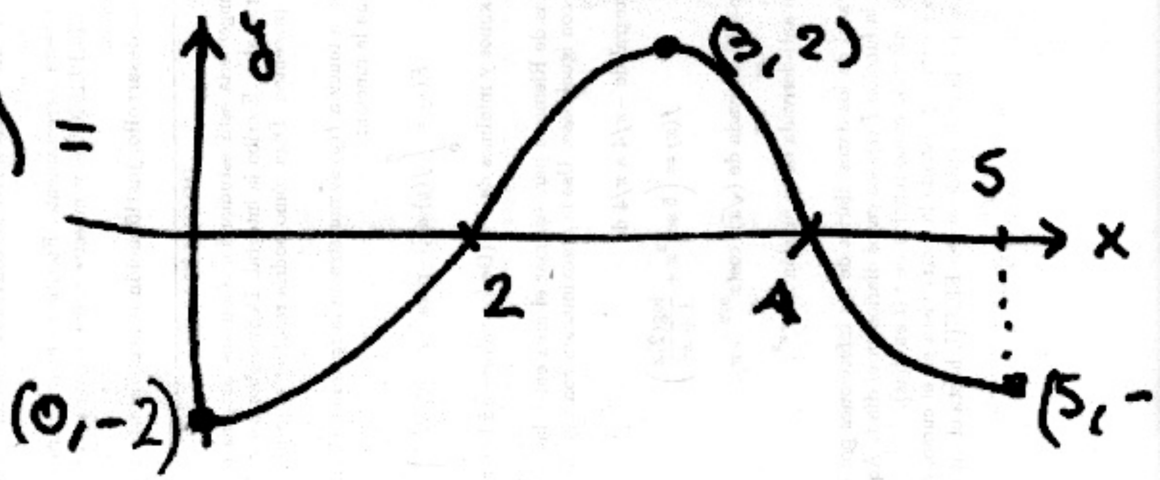
(6) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de la función $x^3 e^{-x^2}$.

(7) **(10 puntos.)** El doctor Fauci da los datos diarios de las infecciones por el virus SARS-CoV-2 en EE.UU, es decir, está proporcionando la función $I'(t)$, los casos diarios en el día t. Aquí, $I'(t)$ es la derivada de la función $I(t)$, el número de casos con infección como función de t (t en días).

Explique, en sus propias palabras y usando la teoría vista en el curso, qué significa la siguiente integral, en donde T es el tiempo en días que lleva la epidemia en EE.UU. hasta el día de hoy.

$$\int_0^T I'(t)\,dt.$$

$f(x) =$



UAM - AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | Lunes, Diciembre 13, 2021

Examen #1 ANSWER KEY

(1) Chemical Engineering

If $R(t)$ is the rate of change (velocity) at which a swimming pool is polluted, then

$$\int_0^T R(t)\,dt \text{ is the total pollutant inside the pool.}$$

Industrial Engineering:

Let $P(T)$ be the performance of a device at temperature T. Then $\frac{dP}{dT}$ is the way the performance P changes when temperature T changes.

Then,
$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dP}{dT}(T)\,dT = P(T_2) - P(T_1)$$

is how the performance of the device changes when the room temperature goes from T_1 to T_2.

② We should use the 1^{st} derivative criterion for Min-Max. By the Fundamental Theorem of Calculus

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(y)\,dy = f(x), \qquad x \in [0,5].$$

Observe that:

(a) $F'(x) = f(x) < 0$ for $x \in [0,2]$

then $F(x) \searrow$ for $x \in [0,2]$

(b) $F'(x) = f(x) \geq 0$, for $x \in [2,4]$

then $F(x) \nearrow$ for $x \in [2,4]$

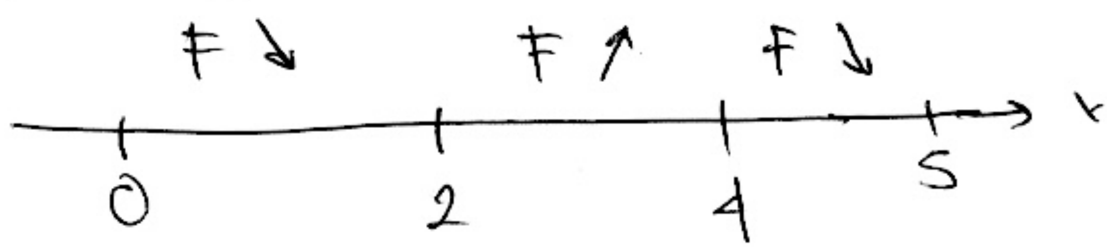
(c) $F'(x) = f(x) < 0$ $\searrow$ for $x \in [4,5]$.

then $F(x) \searrow$ for $x \in [4,5]$.

Then, $F(2)$ is a local minimum ($F \searrow$ then $\nearrow$ $x=2$)

$F(4)$ is a local maximum ($F \nearrow$ then $\searrow$ at $x=4$).

Graphically:



③ . We have to approximate the integral

$$\text{Area} = \int_1^3 (1+x^2)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*)\,\Delta x.$$

Here $N = 4$, $\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

and the sub-intervals are. $[x_k, x_{k+1}]$

with $x_0 = 0$, $x_1 = 1+\frac{1}{2}$, $x_2 = 1+2\cdot\frac{1}{2}$, $x_3 = 1+\frac{3}{2}$

$x_4 = 1+\frac{4}{2}$

i.e. $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 3$.

We use the right end-points: $x_k^* = x_k$.

i.e. $x_1^* = x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2^* = x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 3$

$$\text{Area} = \int_1^3 (1+x^2)\,dx \approx \sum_{k=1}^{4} (1+x_k^2)\,\Delta x = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} (1+x_k^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \left[1+2^2\right] + \left[1+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + \left[1+3^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4+9}{4} + \frac{4+16}{4} + \frac{4+25}{4} + \frac{4+36}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{13+20+29+40}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{102}{4} = \frac{51}{4}.$$

$$\boxed{\text{Area} \approx \frac{51}{4}}$$

(4) We want to compute:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(5\sec^2 x + \frac{\log(2)\, x}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= 5\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx + \log 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x}{1+x^2}\, dx.$$

Since $\sec^2 x$ is an <u>even</u> function and $\frac{x}{1+x^2}$ is odd:

$$= 5\cdot 2\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx + (\log 2)\cdot 0 \quad \text{, by symmetry.}$$

$$= 5\cdot 2 \tan x \Big|_0^{\pi/4} + 0 \quad \text{, by the Fundamental Theorem}$$

$$= 10\left(\tan\frac{\pi}{4} - 0\right) = 10(1) = 10$$

Then $\boxed{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(5\sec^2 x + \frac{\log(2)\, x}{x^2+1}\right) dx = 10}$

⑤ We need to compute the indefinite integral.

$$\int x^{7/2} \cos\left(x^{9/2} - \pi\right) dx = -\int x^{7/2} \cos\left(x^{9/2}\right) dx$$

since $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta$

Taking the change of variable $y = x^{9/2}$

$$x^{7/2} = \frac{2}{9}\frac{dy}{dx} \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9}{2} x^{7/2}$$

$$= -\int \frac{2}{9}\frac{d}{dx}y(x) \cos y(x)\, dx = -\frac{2}{9}\int \cos y \, dy$$

$$= -\frac{2}{9}\sin y + C = \boxed{-\frac{2}{9}\sin\left(x^{9/2}\right) + C}$$

or $$= +\frac{2}{9}\sin\left(x^{9/2} - \pi\right) + C.$$

(6) We should compute the indefinite integral.

$\int x^3 e^{-x^2} dx$. Observe: $x^3 e^{-x^2} = x^2(x e^{-x^2})$

$= -\frac{1}{2}x^2(-2x e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}x^2(e^{-x^2})'$

Then,

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int x^2(-2x e^{-x^2}) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int x^2 (e^{-x^2})' d$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} - \int (x^2)' e^{-x^2} dx\right],$$ by integration by part

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} + \int (-2x) e^{-x^2} dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} + \int (e^{-x^2})' dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C_1\right]$$ by the Fundamental Theorem of Calculus

Then:

$$\boxed{\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C_2}$$

(7) We know the integral.

$$\int_0^T I'(t)\, dt$$

By the Fundamentl Theorem of Calculus (or the so called "Net Change" theorem)

$$\int_0^T I'(t)\, dt = I(T) - I(0).$$

(R) The Right Hand Side $I(T) - I(0)$.

is (# infections today) − (# infections on day 0)

= Accumulated # of infections from $t=0$ to day $t=T$

(L) The left-Hand Side indicates you are summing over the interval $[0,T]$ all the daily new cases $I'(t)$. This total should be $I(T)-I(0)$. the total cases up today. $I(T)-I(0) = I(T)$, assuming $I(0)=0$ infected on day 0.

Conclusion: Both quantities should coincide, by the Fundamentl Theorem of Calculus //

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO INTEGRAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021. PEER.

EXAMEN # 1.
FECHA: **LUNES 13 DE DICIEMBRE DE 2021: 16:00H.**
DE 16:00 A 17:30 HORAS. ENTREGA: 17:30 A 18:00 HORAS

Nombre: ANSWER KEY B

Instrucciones:

- El examen consta de **SIETE** problemas con diferentes puntajes.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL.** Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(10 puntos.)** Diga qué ingeniería está estudiando. Con sus propias palabras, describa un problema en su ingeniería que involucre integrales. Escriba la integral. Defina bien las variables dependientes e independientes y diga, *grosso modo*, qué representan. Diga cómo podría resolver el problema usando Cálculo Integral.

(2) **(20 puntos.)** Considere la función:

$$G(t) = \int_0^t \cos(z^2)\, dz, \quad \text{para} \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}]$$

¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de G?
(Dé los valores en la forma $G(1)$, por ejemplo. Los ceros de $g(t) = \cos(t^2)$ en el intervalo $[0, \sqrt{2\pi}]$ son $t = \sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}$. **La función** $g(t) = \cos(t^2)$ **NO tiene anti-derivada.**)

(3) **(10 puntos.)** Utilice sumas de Riemann para estimar el área entre las curvas $y = 1 + t^2, t = -2, t = 0, y = 0$ usando cuatro rectángulos con igual base. Use la aproximación con puntos izquierdos.

(4) **(10 puntos.)** Evalúe la integral de $-\pi/4$ a $\pi/4$ de

$$g(t) = \left(-8\sec^2 t + \frac{e^2 t^3}{3 + \sin^2 t}\right)$$

(5) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de $(\sqrt{t})^{-3} \exp(t^{-1/2} - \log(2))$.

(6) **(20 puntos.)** Encuentre la anti-derivada de la función $t^2 \log(t)$.

(7) **(10 puntos.)** El doctor Fauci da los datos diarios de las infecciones por el virus SARS-CoV-2 en EE.UU, es decir, está proporcionando la función $I'(t)$, los casos diarios en el día t. Aquí, $I'(t)$ es la derivada de la función $I(t)$, el número de casos con infección como función de t (t en días).

Explique, en sus propias palabras y usando la teoría vista en el curso, qué significa la siguiente integral, en donde T es el tiempo en días que lleva la epidemia en EE.UU. hasta el día de hoy.

$$\int_0^T I'(t)\, dt.$$

UAM - AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | Lunes, Diciembre 13, 2021

Examen #1 ANSWER KEY

① Chemical Engineering

If $R(t)$ is the rate of change (velocity) at which a swimming pool is polluted, then.

$$\int_0^T R(t)\,dt$$ is the total pollutant inside the pool.

Industrial Engineering:

Let $P(T)$ be the performance of a device at temperature T. Then $\frac{dP}{dT}$ is the way the performance P changes when temperature T changes.

Then,
$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dP}{dT}(T)\,dT = P(T_2) - P(T_1)$$
is how the performance of the device changes when the room temperature goes from T_1 to T_2.

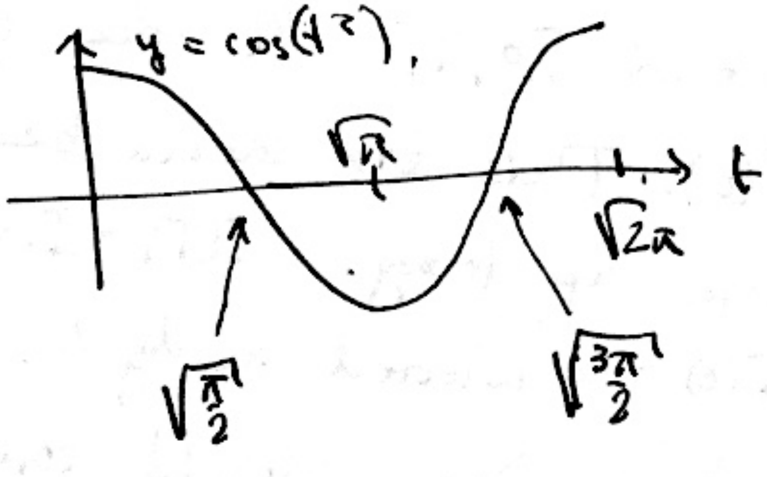
② -B. We have the function
$$f(t)=\int_0^t \cos(z^2)\,dz\,, \qquad t\in[0,\sqrt{2\pi}\,].$$
We want the min-max of f. Use the 1^{st} derivative criterion. Then computing $f'(t)$,
$$f'(t)=\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos(z^2)\,dz\right)=\cos(t^2).$$
by the Fundamental Theorem of Calculus.

We know that $f'(t)=\cos(t^2)=0$ at $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ and $t=\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ (both are $<\sqrt{2\pi}$).

Now, $\cos(1)>0 \qquad 0<1<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$\cos\left((\sqrt{2})^2\right)<0\,, \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}<\sqrt{2}<\sqrt{\frac{3\pi}{2}}.$$

Then, the graph of $\cos(t^2)$ looks like.



or, you can tell your graphing device to plot
$y=\cos(t^2)$.

(a) $G'(t) = \cos(t^2) > 0, \quad t \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$

then $G(t) \nearrow$, on $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$

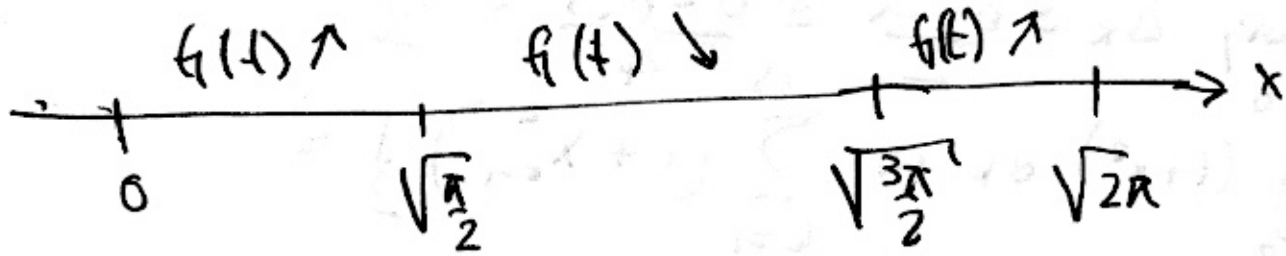
(b) $G'(t) = \cos(t^2) < 0, \quad t \in [\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}]$

then $G(t) \searrow$ on $[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}]$.

(c) $G'(t) = \cos(t^2) > 0$, on $[\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{2\pi}]$

then $G(t) \nearrow$ on $[\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{2\pi}]$.

On the real line, we have



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Then, } G\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \text{ is a } \underline{\text{local maximum}} \\ \text{and } G\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right) \text{ is a } \underline{\text{local minimum}}.\end{array}}$$

③-B In this problem we should approximate the integral $\int_{-2}^{0}(1+x^2)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*)\,\Delta x$

with $N=4$, $x_k^* = x_{k-1}$ the left points of the subintervals $\left[-2,-\frac{3}{2}\right],\left[-\frac{3}{2},-1\right],\left[-1,-\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},0\right]$

i.e. $x_1^* = x_0 = -2$, $x_2^* = x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_3^* = x_2 = -1$, $x_4^* = x_3 = -\frac{1}{2}$

(The ending points are

$x_0=-2,\ x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=-1,\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=0$).

Then, $\Delta x = \frac{b-a}{2} = \frac{0-(-2)}{4} = 1/2$

$$\int_{-2}^{0}(1+x^2)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N}\left(1+x_{k-1}^2\right)\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+(-2)^2\right)+\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+\left[1+(-1)^2\right]+\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[5+\frac{4+9}{4}+2+\frac{4+1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{20+13+8+5}{4}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{46}{4} = \frac{23}{4}.$$

$$\boxed{\int_{-2}^{0}(1+x^2)\,dx \approx \frac{23}{4}}$$

4-B We need to compute

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(-8\sec^2 t + \frac{e^2 t^3}{3+\sin^2 t}\right) dt =$$

$$= -8\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t \, dt + e^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^3}{3+\sin^2 t} dt,$$ by Properties of the integrals.

Since $\sec^2 t$ is <u>even</u> and $\dfrac{t^3}{3+\sin^2 t}$ is odd:

$$= -8\cdot 2\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \, dt + e^2 \cdot 0.$$

$$= -16 \tan(t)\Big|_0^{\pi/4} + 0,$$ by the <u>Fundamental Theorem</u> of <u>Calculus</u>.

$$= -16\left(\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \tan 0\right) = -6(1-0) = -6.$$

Then,

$$\boxed{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(-3\sec^2 t + \frac{e^2 t^2}{3+\sin^2 t}\right) dt = -16}$$

(5) - B. We should compute the indefinite integral:

$$\int (\sqrt{t})^{-3} e^{(t^{-1/2} - \log 2)} dt = \int t^{-3/2} e^{t^{-1/2}} e^{-\log 2} dt$$

$$= (2)^{-1} \int t^{-3/2} e^{t^{-1/2}} dt$$

Define $y = t^{-1/2}$ then $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-3/2}$.

$$\Rightarrow t^{-3/2} = -2 \frac{dy}{dt}.$$

thus.

$$= (2)^{-1} \int (-2) \frac{dy}{dt} e^{y} dt = \frac{(-2)}{2} \int e^{y} dy$$

$$= - e^{y} + C$$

thus: $$\boxed{\int (\sqrt{t})^{-3} e^{t^{-1/2} - \log 2} dt = -e^{t^{-1/2}} + C}$$

(6) We need to compute: the indefinite integral

$$\int t^2 \log(t)\, dt = \int \left(\tfrac{1}{3}t^3\right)' \log(t)\, dt$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}t^3\right)\log t - \int \tfrac{1}{3}t^3 (\log t)'\, dt, \text{ by Integration by parts.}$$

$$= \tfrac{1}{3}t^3 \log t - \tfrac{1}{3}\int t^3 \cdot \tfrac{1}{t}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{3}t^3 \log t - \tfrac{1}{3}\int t^2\, dt$$

$$= \tfrac{1}{3}t^3 \log t - \tfrac{1}{3}\,\tfrac{t^3}{3} + C$$

$$\boxed{\int t^3 \log(t)\, dt = \tfrac{1}{9}t^3(3\log t - 1) + C.}$$

(7) We have the integral.

$$\int_0^T I'(t)\,dt$$

By the Fundamental Theorem of Calculus (or the so called "Net Change" theorem)

$$\int_0^T I'(t)\,dt = I(T) - I(0).$$

(R) The Right Hand Side $I(T) - I(0)$.

is (# infections today) − (# infections on day 0)

= Accumulated # of infections from $t=0$ to day $t=T$

(L) The left-hand side indicates you are summing over the interval $[0,T]$ all the daily new cases $I'(t)$. This total should be $I(T)-I(0)$. the total cases up today. $I(T)-I(0) = I(T)$, assuming $I(0)=0$ infected on day 0.

Conclusion: Both quantities should coincide, by the Fundamental Theorem of Calculus