UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021
CÁLCULO DIFERENCIAL
EXAMEN # 2 (FORMA REMOTA).
FECHA: VIERNES 7 DE ENERO DE 2022
HORA 14:30. ENTREGA: DE 16:00 A 16:30 HORAS

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **CUATRO** problemas con diferentes puntajes.
- Disponen de **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos: **de 14:30 a 16:00 horas.**
- Tienen 30 minutos adicionales para subir su examen al *Google Classroom*: **hasta las 16:30 h**
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de manera **INDIVIDUAL.** Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- Para recibir puntaje: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(35 puntos)** Bosqueje (es decir, dibuje a mano) la gráfica de la siguiente función. Para ello, detalle, calcule y argumente lo que enseguida se pide. Con base a esta información, grafique la función. Compare con la gráfica que le de su graficador. Incluya también la imagen de la gráfica dada por el graficador.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

(a) Dominio de f.
(b) Encuentre las intersecciones con los ejes.
(c) Encuentre las simetrías que pueda tener la gráfica y úselas posteriormente para el bosquejo.
(d) Comportamiento al infinito y asíntotas de la gráfica de f.
(e) Puntos críticos de f.
(f) Intervalos de monotonía de f.
(g) Máximos y mínimos locales y, en su caso, máximos y mínimos globales de f.
(h) Intervalos de convexidad.
(i) Puntos de inflexión (en caso de que existan).
(j) Verifique sus máximos y mínimos locales con el criterio de la segunda derivada.
(k) Bosqueje la gráfica.
(l) Compare con la gráfica de su graficador (incluya esta gráfica).

(2) **(35 puntos.)** Un globo aerostático se eleva verticalmente desde el nivel del piso, mientras una persona que está a 150 metros del punto de despegue, lo observa elevarse. En el momento en que el ángulo del sector globo-observador-piso es de $\pi/4$, dicho ángulo incrementa a una velocidad angular de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido sube el globo en ese momento?

(3) **(15 puntos.)** Suponga que usted va en auto de Guanajuato Capital a la UAM-Azcapotzalco. Son 4 horas de manejo y supongamos que son 400 km de distancia. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la posición de la flecha del velocímetro de su automóvil? Argumente su respuesta con un teorema matemático visto en el curso.

(4) **(15 puntos.)** Bosqueje (es decir, dibuje a mano) la gráfica de la función
$f(x) = (x+4)^2(x+2)^3x(x-1)^4(x-3)^5$.

UAM-Azcapotzalco | $\boxed{\text{Cálculo Diferencial}}$ | Viernes, Enero 7, 2022

Examen Parcial # 2 Solution Key.

(1). $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

Graficar

$\boxed{\text{Este problema se dejó de tarea.}}$

(a) Dominio:

The only singularity is at the denominator, so we require $3x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5/3$.

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, \tfrac{5}{3}) \cup (\tfrac{5}{3}, \infty).$$

(b). Intercepts.

Y-intercept. Set $x=0$: $y = f(0) = \dfrac{\sqrt{0+1}}{0-5} = -\dfrac{1}{5}$

X-intercept. Set $y=0 \Rightarrow f(x)=0$:

i.e. $\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = 0$,

but this is impossible, since $\sqrt{2x^2+1} > 0$.

No intersection with x-axis

(c) Symmetries.

$$f(-x) = \frac{\sqrt{2(-x)^2+1}}{3(-x)-5} = -\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} \neq f(x).$$
$$\neq -f(x)$$

There is no symmetries.

It is not periodic either.

(d) We compute limits $x \to \frac{5}{3}^+$, $x \to \frac{5}{3}^-$

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \sqrt{2\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}\ \lim_{x \to \frac{5}{3}^+} \frac{1}{3x-5} = \infty.$$

$$\left(\text{Say: } x = \frac{6}{3} = 2 : \quad \frac{1}{3\left(\frac{6}{3}\right)-5} = 1 > 0\right)$$

Similarly:

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-\frac{5}{2}} = \sqrt{2\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}\ \lim_{x \to \frac{5}{3}^-} \frac{1}{3x-5} = -\infty$$

Then: $\boxed{x = \frac{5}{3}}$ is a vertical asymptote.

~ o ~

Now:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} \underset{x>0}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x}\right) \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \checkmark$$

On the other hand.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} =$$

$$\underset{x<0}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} = \lim_{x \to -\infty} (-1) \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{3-5/x} = (-1)\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Then, f has two horizontal asymptotes. $\lfloor$ 050107202l

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y &= -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}}$$

(e) Critical points. We need to compute f':

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}\right) = \frac{(3x-5)(\sqrt{2x^2+1})' - \sqrt{2x^2+1}\,(3x-5)'}{(3x-5)^2}$$

$$= \frac{(3x-5)\,\frac{1}{2}\frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}} - \sqrt{2x^2+1}\cdot 3}{(3x-5)^2}$$

$$= \frac{(3x-5)\,2x - (2x^2+1)\cdot 3}{\sqrt{2x^2+1}\,(3x-5)^2} = \frac{6x^2-10x-6x^2-3}{\sqrt{2x^2+1}\,(3x-5)^2}$$

Then $f'(x) = \dfrac{-(10x+3)}{\sqrt{2x^2+1}\,(3x-5)^2}$

Critical points (a) $f'(x) = 0$

(b) $f'(x)$ does not exist.

(a) $f'(x)=0$, $\Rightarrow$ $-(10x+3)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=-3/10}$

(b) $f'(x)$ does not exist at $x=5/3$, but $5/3 \notin \mathrm{Dom}(f)$.

$\boxed{x=-3/10}$ only critical point.

(f) We divide the interval in

<u>Monotony</u>

$$\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right); \left(-\frac{3}{10}, \frac{5}{3}\right); \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$$

Take $x_1 = -1 \in \left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$.

$x_2 = 0 \in \left(-\frac{3}{10}, \frac{5}{3}\right)$

$x_3 = 2 \in \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

$$f'(-1) = \frac{-(10(-1)+3)}{\sqrt{2(-1)^2+1}\,(3(-1)-5)^2} = \frac{7}{\sqrt{3}\,(-8)^2} > 0.$$

$$f'(0) = \frac{-(0+3)}{\sqrt{0+1}\,(0-5)^2} = \frac{-3}{\sqrt{1}\,(5)^2} < 0$$

$$f'(2) = \frac{-(10\cdot 2+3)}{\sqrt{2(2)^2+1}\,(3\cdot 2-5)^2} = \frac{-23}{3(1)^2}. < 0$$

Then

$f \nearrow$ on $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$

$f \searrow$ on $\left(-\frac{3}{10}, \frac{5}{3}\right)$

$f \searrow$ on $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$.

(g). Then, there is a local maximum of f at $\boxed{x = -\frac{3}{10}}$ i.e. $\max_{loc}(f) = \dfrac{\sqrt{2\left(-\frac{3}{10}\right)^2+1}}{3\left(-\frac{3}{10}\right)-5}$

$$= \frac{\sqrt{18/100+1}}{-\frac{9}{10}-5} = \frac{\sqrt{18+100}/10}{-(9+50)/10} = \frac{\sqrt{118}}{-59} < 0.$$

There is __no__ __global__ extrema, because of the vertical asymptotes: $\lim_{x\to\frac{5}{3}^{\pm}} f(x) = \pm\infty$..

(h). __Convexity__. We need f'':

Writing $f'(x) = -(10x+3)(2x^2+1)^{-1/2}(3x-5)^{-2}$, then:

$$f''(x) = -10(2x^2+1)^{-1/2}(3x-5)^{-2}$$
$$-(10x+3)\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)^{-3/2}(4x)(3x-5)^{-2}$$
$$-(10x+3)(2x^2+1)^{-1/2}(-2)(3x-5)^{-3}\,3$$

$$= -10(2x^2+1)^{-1/2}(3x-5)^{-2}$$
$$+(10x+3)2x(2x^2+1)^{-3/2}(3x-5)^{-2}$$
$$+6(10x+3)(2x^2+1)^{-1/2}(3x-5)^{-3}$$

$$= \begin{pmatrix} -10(2x^2+1)(3x-5) \\ +(10x+3)2x(3x-5) \\ +6(10x+3)(2x^2+1) \end{pmatrix}(2x^2+1)^{-3/2}(3x-5)^{-3}$$

$= S =$

$$= \begin{pmatrix} -10(\cancel{6}x^3 - 10x^2 + \cancel{3x} - 5) \\ +2(3\cancel{0}x^3 - 41x^2 - 75x) \\ +6(20x^3 + 6x^2 + \cancel{10}x + 3) \end{pmatrix} \frac{1}{(2x^2+1)^{3/2}(3x-5)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{120x^3 + 5x^2 + 68}{(2x^2+1)^{3/2}(3x-5)^3}}$$

Using Mathematica:

$f''(x) = 0$ at $\boxed{x_0 = -1.0079}$

The other two roots are complex

Now, $f''(-1) = \dfrac{-120 + 54 + 68}{3^{3/2}(-8)^3} = \dfrac{-120+122}{-3^{3/2}\cdot 8^3} = \dfrac{-2}{3^{3/2}\cdot 8^3} < 0$.

Then, f <u>concave down</u> on $(x_0, \frac{5}{3})$

f <u>concave up</u> on $(-\infty, x_0)$.

Finally: $f''(2) = \dfrac{120\cdot 2^3 + 5\cdot 2^2 + 68}{(2\cdot 2^2+1)^{3/2}(6-5)^3} > 0$

$(2 > \frac{5}{3})$.

f concave up on $(\frac{5}{3}, \infty)$.

(i) We have an <u>inflection point</u> at $\boxed{x = x_0 = -1.0079}$

Now $x = -3/10$ is a critical point:

$$f''(-\tfrac{3}{10}) = \frac{-120\cdot\frac{27}{1000} + 5\cdot\frac{9}{100} + 68}{(2x^2+1)^{3/2}\left(-\frac{9}{10} - 5\right)^3} < 0.$$

Positive

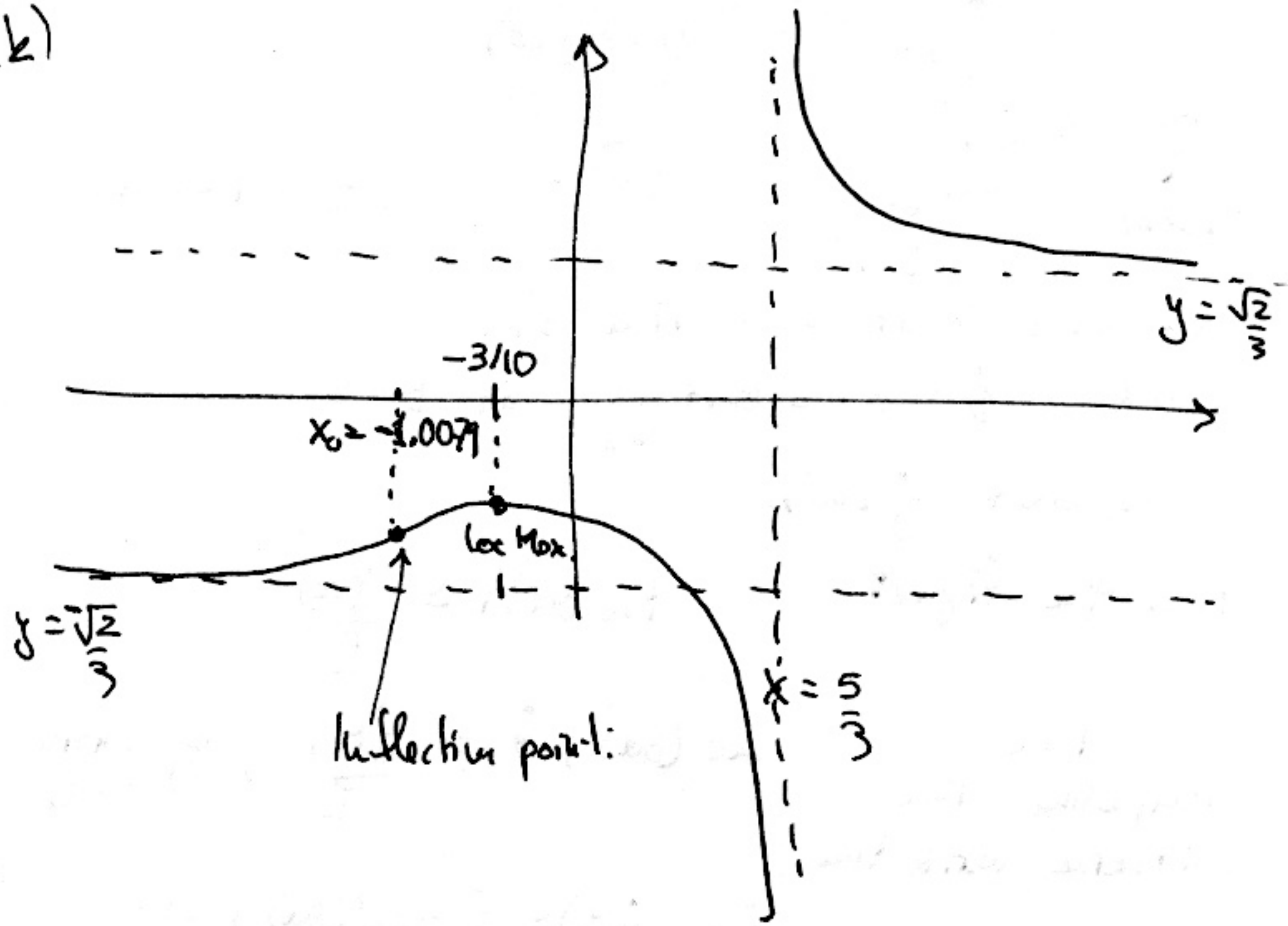
Negative

=6=

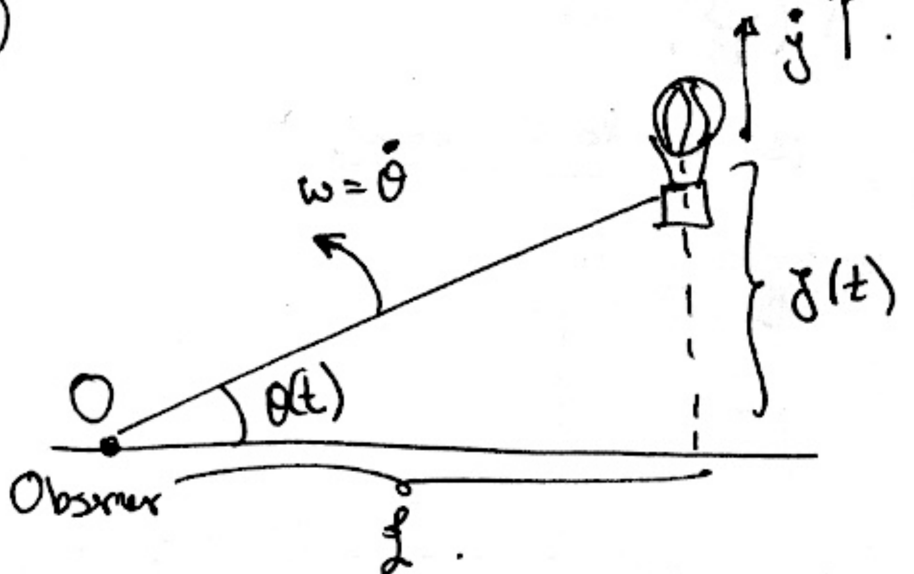
Then, $f''(-\frac{3}{10}) < 0$, $f'(-\frac{3}{10}) = 0$

Then $f(-\frac{3}{10})$ is a <u>local max</u>.

(b)



(2)



$\ell = 150\,m.$

We know θ at some time t_0.

and $\dot{\theta} = \omega = 0.14 \frac{rad}{sec}$ at $t = t_0$.

We want $\dot{y}(t_0)$.

From the figure: $\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{\ell}$

Then computing the derivative w.r.t. time $\sec^2(\theta(t))\,\dot{\theta} = \frac{\dot{y}(t)}{\ell}$, by chain rule.

i.e. $\dot{y}(t) = \ell \sec^2(\theta(t))\,\omega$.

or $\boxed{\dot{y}(t) = \frac{\ell\,\omega}{\cos^2(\theta(t))}}$ Related rates formula:

If $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Since $\ell = 150\,m$, $\omega = 0.14/sec$.

$\dot{y}(t) = \frac{150\cdot(0.14)}{(\sqrt{2}/2)^2}\frac{m}{sec} = \frac{150\,(0.14)}{2/4}\frac{m}{sec} = \frac{150\,(0.14)}{1/2}\frac{m}{sec}$

$\Rightarrow \dot{y}(t) \approx 300\cdot(0.14)\frac{m}{sec}$

$\boxed{\dot{y}(t) = 42\ m/sec}$

③ Let $x(t)$ the position of the car at time t.

At $t=0$, $x(0) =$ Guanajuato $= 0$ km

At $t = 4$ hr $x(4) =$ CDMX $= 400$ km

By the Mean Value Theorem, there exists a time t_0, such that:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(4) - x(0)}{4-0} \frac{\text{km}}{\text{hr}} = \frac{400-0}{4-0} \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

$$\dot{x}(t_0) = 100 \ \frac{\text{km}}{\text{hr}}.$$

This means that, at some unknown time $t = t_0$, the speedometer spotted 100 km/hr

(4) $P(x) = (x+4)^2 (x+2)^3 x (x-1)^4 (x-3)^5$.

P is a polynomial of degree $2+3+1+4+5 = 15$

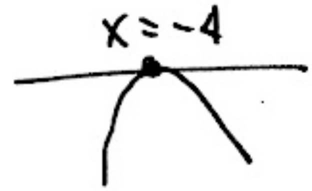
with roots: $x=-4$, $x=-2$, $x=0$, $x=1$, $x=3$

At $x=-4$:)

$$P(x) \sim (x+4)^2 (-2)^3 (-4)(-5)^4 (-7)^5$$

$$= (-1)^{15}\, 2^3 \cdot 4 \cdot 5^4 \cdot 7^5 (x+4)^2.$$

$$= -\,\text{Const}\,(x+4)^2$$

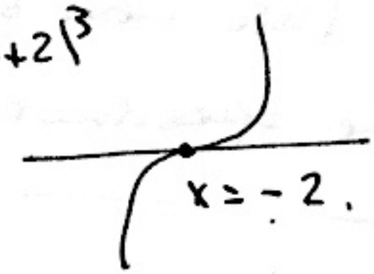


At $x=-2$)

$$P(x) \sim 2^2 (x+2)^3 (-2)(-3)^4 (-5)^5$$

$$= (-1)^{10}\, 2^2 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 5^5 (x+2)^3$$

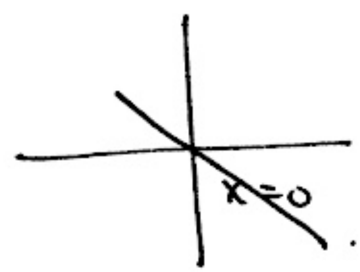
$$= +\,\text{Const}\,(x+2)^3$$



At $x=0$)

$$P(x) \sim 4^2 \cdot 2^3\, x\, (-1)^4 (-3)^3$$

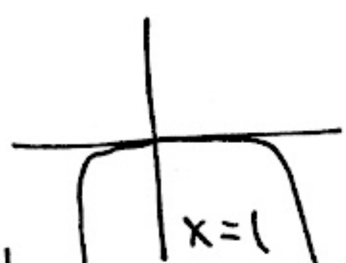
$$= (-1)^7\, 4^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3\, x.$$



At $x=1$)

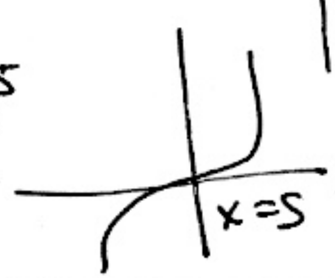
$$P(x) \simeq 5^2 (3)^3 \cdot 1 \cdot (x-1)^4 (-2)^5$$

$$\simeq (-1)^5\, 5^2\, 3^3 \cdot 2^5 (x-1)^4$$



At $x=3$)

$$P(x) \sim 7^3 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 2^4 (x-3)^5$$



We can now plot the graph of the polynomial