UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2021
CÁLCULO DIFERENCIAL
EXAMEN # 2 - REPOSICIÓN (FORMA REMOTA).
FECHA: LUNES 10 DE ENERO DE 2022. HORA 16:00.
ENTREGA: MARTES 11 DE ENERO DE 2022. HORA: ANTES DE LAS 14:30 H

Nombre: ANSWER KEY.

- El examen consta de **SEIS** problemas con diferentes puntajes.
- Tienen **hasta ANTES de las 14:30 h** del **martes 11 de enero** para subir su examen al *Google Classroom.*
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de manera **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Pueden usar sus libros, apuntes y una calculadora sencilla o graficador sencillo. Cite cuando use libro, apuntes o su calculadora. Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- Para recibir puntaje: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.
- **Hagan su examen con SUMO CUIDADO, incluyan TODOS LOS DETALLES, limpio y con buena presentación.** Falta a estos requisitos pueden costar CERO puntos en cada problema.

PROBLEMAS

(1) **(10 puntos.)** Conteste a las siguientes preguntas.
  (a) ¿Qué ingeniería estudia?
  (b) Ahora enuncie un problema de tasas relacionadas que usted considere aparece en el estudio de su ingeniería.
  (c) ¿Cuáles son sus variables dependientes e independientes?
  (d) Describa cómo resolvería el problema usando Cálculo Diferencial.

(2) **(10 puntos.)** Imagine que usted tiene un puesto de tamales y quiere saber cuántos tamales debe hacer para tener una máxima ganancia y no tener una ganancia mínima. Digamos que G es la ganancia (en pesos, \$) y n es el número de tamales que usted prepara. Entonces tiene la función $G = G(n)$. Se le da la gráfica de la derivada de G y que viene en el otro archivo pdf. Diga cuántos tamales debe preparar para tener ganancia máxima y cuántos no debe preparar para no tener ganancia mínima.

(3) **(30 puntos.)** Un globo aerostático se eleva verticalmente desde el nivel del piso, mientras una persona que está a 300 metros del punto de despegue, lo observa elevarse. En el momento en que el ángulo del sector globo-observador-piso es de $\pi/4$, dicho ángulo incrementa a una velocidad angular de 0.28/min. ¿Qué tan rápido sube el globo en ese momento?

(4) **(10 puntos.)** Suponga que usted va en auto de Hermosillo a la CDMX. Son 1900 km de distancia y supongamos que son 19 horas de manejo. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la posición de la flecha del velocímetro de su automóvil? Argumente su respuesta con un teorema matemático visto en el curso.

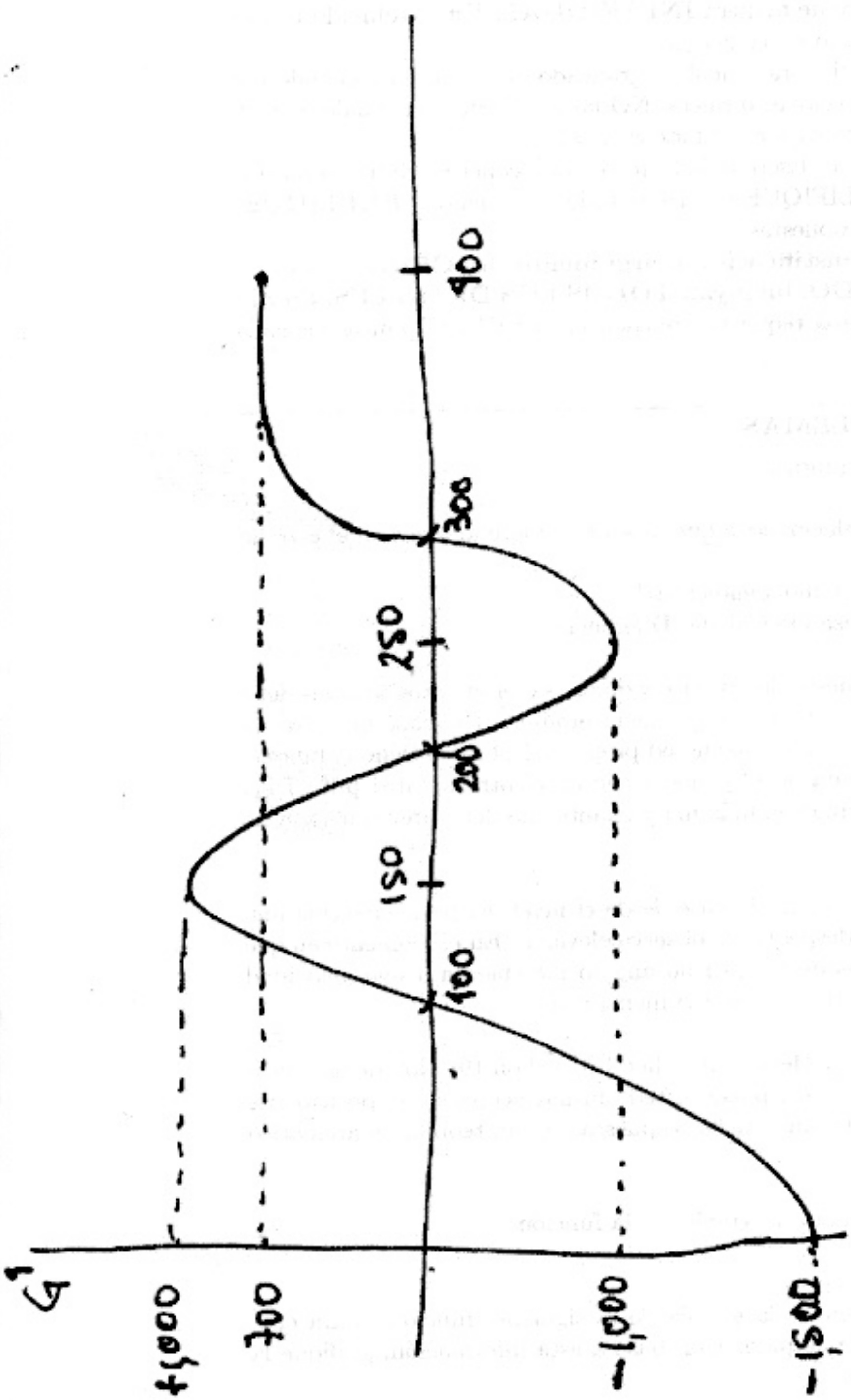
(5) **(10 puntos.)** Bosqueje (es decir, dibuje a mano) la gráfica de la función
$f(x) = (x+4)^4x^2(x-3)^5(x-5)$.

(6) **(30 puntos)** Bosqueje (es decir, dibuje a mano) la gráfica de la siguiente función. Para ello, detalle, calcule y argumente lo que enseguida se pide. Con base a esta información, grafique la

función. Compare con la gráfica que le de su graficador. Incluya también la imagen de la gráfica dada por el graficador.

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$$

(a) Dominio de f.
(b) Encuentre las intersecciones con los ejes.
(c) Encuentre las simetrías que pueda tener la gráfica y úselas posteriormente para el bosquejo.
(d) Comportamiento al infinito y asíntotas de la gráfica de f.
(e) Puntos críticos de f.
(f) Intervalos de monotonía de f.
(g) Máximos y mínimos locales y, en su caso, máximos y mínimos globales de f.
(h) Intervalos de convexidad.
(i) Puntos de inflexión (en caso de que existan).
(j) Verifique sus máximos y mínimos locales con el criterio de la segunda derivada.
(k) Bosqueje la gráfica.
(l) Compare con la gráfica de su graficador (incluya esta gráfica).



Examen #2. ANSWER KEY.

① (a) Chemical Engineering.

(b). There is a contaminant / pollutant. measured in liters.

It is dropped into a river, and there is a concentration of the pollutant in the river

(c) Independent variable: t = time.

Dependent variables: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pollutant in liters.} & V = V(t) \\ \text{Concentration:} & C = C(t) \end{array} \right.$

(d) We have to find a relationship between V and C:

$$f(V, C) = 0 .$$

Then compute the derivative w.r.t. time:

$$\boxed{\frac{dV}{dt}\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{dC}{dt}\frac{\partial f}{\partial C} = 0}$$

and this is the equation of the related rates, $\frac{dV}{dt}$, and $\frac{dC}{dt}$.

② . From the given graph, which is the derivative G', of the profit (ganancia) function, we observe:

	$G' < 0$	$G' > 0$	$G' < 0$	$G' > 0$
x	0	100	200	300	400.
Then	$G \searrow$	$G \nearrow$	$G \searrow$	$G \nearrow$.

Then, $G(100)$ is a local min.

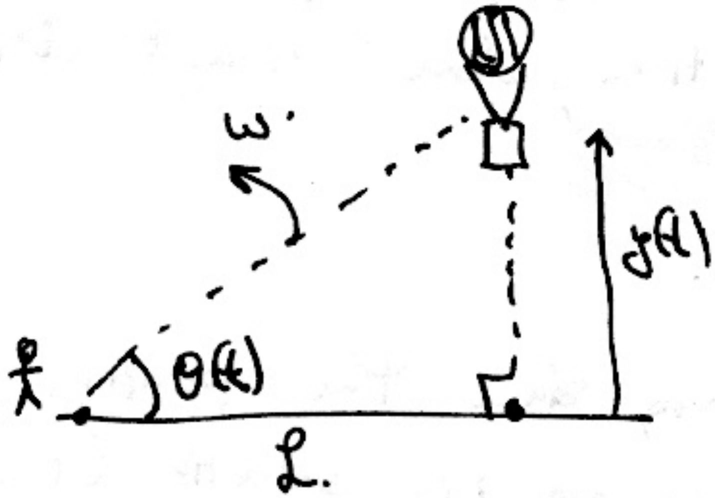
$G(200)$ is a local max

$G(300)$ is a local min.

Then, we need to make 200 trades to get the maximum profit.

For no reason, we should make 100 or 300 trades, since they provide the minimum profit.

(3) We always start by doing a drawing.



Here, $w(t) = \frac{d\theta}{dt}$ is the angular velocity.

ℓ = distance from observer to lifting off point.

$y(t)$ = altitude of balloon at time t..

We have a right triangle. Then.

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \ell \tan(\theta(t))}$$

Computing the derivative:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \ell \sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 168 \frac{m}{sec}}$$

i.e. $\boxed{\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\ell\, w(t)}{\cos^2(\theta(t))}}$ This is the related rates eq'n.

At some instant, $\theta = \pi/4$. Then $w(t) = 0.28/min$.
Since $\ell = 300\,m$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(300\,m)(0.28/sec)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{(300)(0.28)}{(\sqrt{2}/2)^2}\frac{m}{sec} = \frac{(300)(0.28)}{2/4}\frac{m}{sec}$$

$$= \frac{(300)(0.28)}{1/2}\frac{m}{sec} = (600)(0.28)\frac{m}{sec}$$

(4) Here, $x(t)$ is the position at time t.
$t = 0h$ is starting time in Hermosillo
$t = 19h$ is the finishing time, when arriving to CDMX.

Then, $x(0) = 0$ km
$x(19) = 1900$ km.

By the Mean Value Theorem, since the position function $x(t)$ is continuous and its derivative (the velocity) is also continuous, then,
there exists $t_0 \in (0, 19)$, such that

$$x'(t_0) = \frac{x(19) - x(0)}{19 - 0} = \frac{1900 - 0 \text{ km}}{19 \text{ h}}$$

i.e. $\boxed{x'(t_0) = 100 \text{ km/hr}}$

I.e., there is at least one instant to in between $(0, 19)$, such that the speedometer crossed the 100 km/hr

(5) We have the polynomial

$$P(x) = (x+4)^4 \, x^2 \, (x-3)^5 (x-5)$$

with roots

$$x_1 = -4; \; x_2 = 0; \; x_3 = 3; \; x_4 = 5.$$

The degree of P is

$$\deg(P) = 4 + 2 + 5 + 1 = 12$$

The coefficient of the coeff. x^{12} is $+1$, so, $P(x)$ appears up at $\pm \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} P = \infty \;\&\; \lim_{x \to -\infty} P = -\infty.$$

Now, at

(a) at $\underline{x_1 = 4}$ $\quad P(x) \sim (x+4)^4 (-4)^2 (-4-3)^5 (-4-5)$

$$= + 4^2 \cdot 7^5 \cdot 9 \, (x+4)^4$$

$x_1 = -4.$

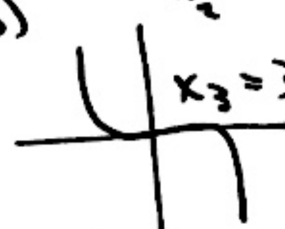
(b) $\underline{x_2 = 0}$ $\quad P(x) \sim 4^4 x^2 (-3)^5 (-5)$

$$= + 4^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot x^2$$

$x_2 = 0$

(c) $\underline{x_3 = 3}$ $\quad P(x) \sim (3+4)^4 \, 3^2 \, (x-3)^5 (3-5)$

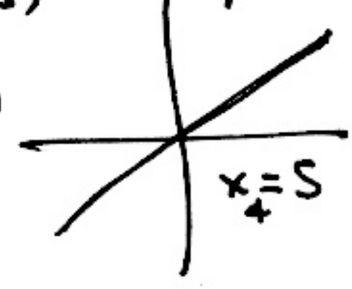
$$= - 7^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \, (x-3)^5$$



$x_3 = 3$

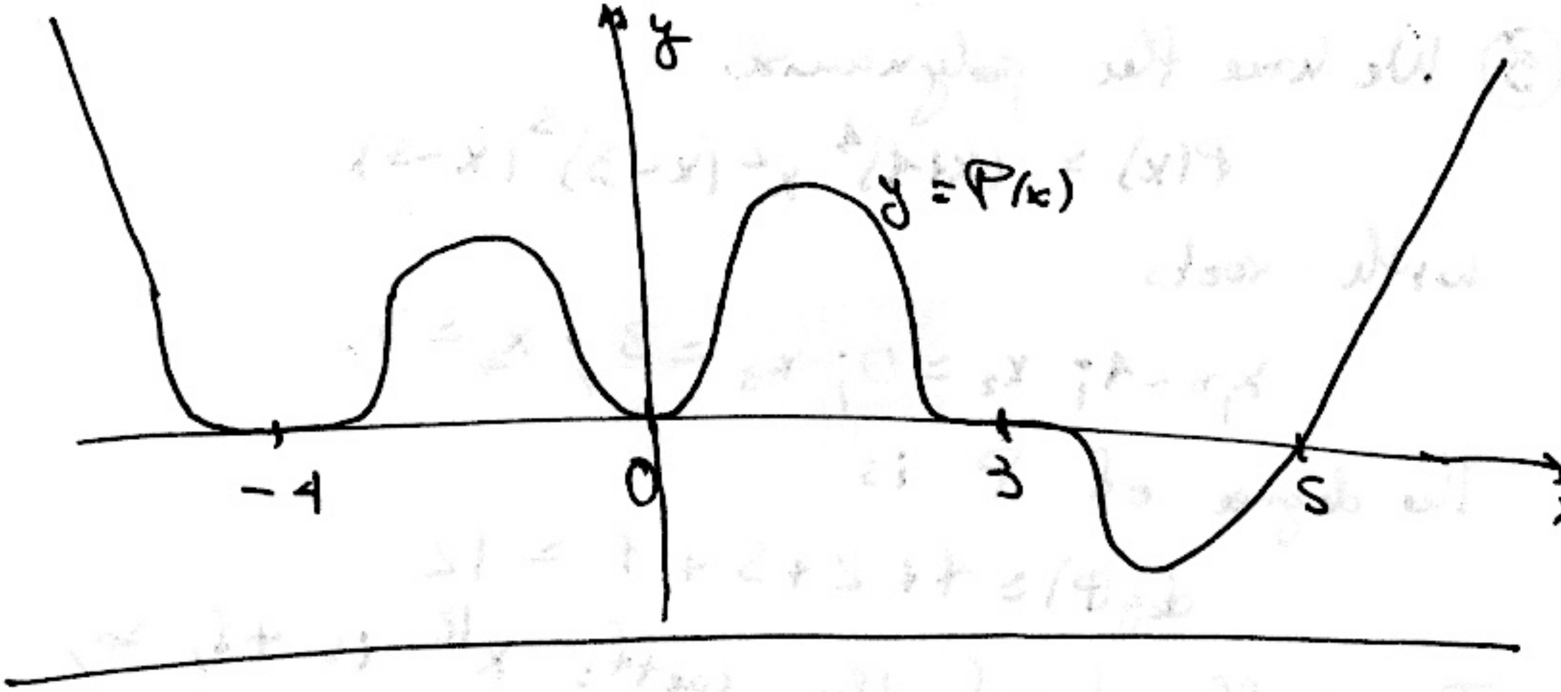
(d) $\underline{x_4 = 5}$ $\quad P(x) \approx (5+4) 5^2 (5-3)^5 (x-5)$

$$= 9 \cdot 5^2 \cdot 2^5 (x-5)$$



$x_4 = 5$

We can now sketch the graph:


y
y = P(x)
-4
0
3
5
x.

⑥. The function to graph is.

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}.$$

$\boxed{\text{Observe that } f(x) \geq 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}}$

(a) Domain: Dom $(f) = \mathbb{R}$, since there is no singularity

denominator $= 1+x^2 \neq 0$. always.

(b). $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ is the only intersection with the x-axis.

$f(0) = \frac{(1+0)^2}{1+0^2} = 1$, $\boxed{y=1}$ is the intersection with y-axis

(c) This function is not even neither odd.

$$f(-x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \neq \pm f(x).$$

It is not periodic. It does not have symmetries.

Before computing asymptotes or derivatives, observe that.

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{f(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2}}$$

(d) Since there is no singularities, there is no vertical asymptotes

Now: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) =$

$$= 1 + \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 1 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} \frac{2}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$$

$$= 1 + \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$$

$$= 1 + \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$$

$$= 1 + \left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot 2.$$

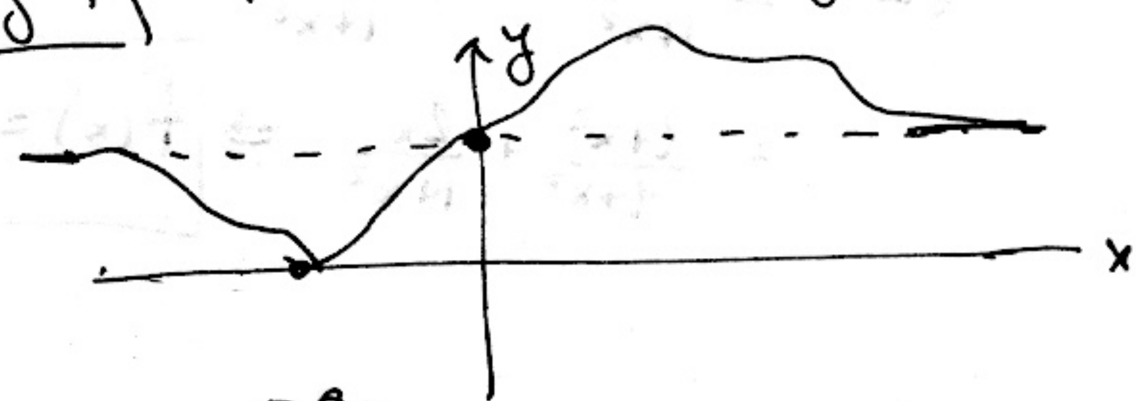
$$= 1 + 0.$$

Then, if $x \to +\infty$ or $x \to -\infty$,

$$f(x) \longrightarrow 1.$$

Then $\boxed{y=1}$ is a horizontal asymptote.

First sketch }



(e) Critical points: We need now to compute the derivative: $f'(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) = 0 + \frac{(1+x^2)\,2 - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

i.e. $$\frac{df}{dx} = 2\,\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \; .$$

The critical points are those where

(α) $\frac{df}{dx} = 0$.

or (β) $\frac{df}{dx}$ does not exists.

Since denominator $= (1+x^2)^2 \neq 0$, the derivative always exists, then, no critical points from (β)

Now, from (α): $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{array}}$$

are the only critical points.

(f) Since $\frac{df}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, evaluate at intermediate points of the intervals $(-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty)$.

At $x=-2$: $\frac{df}{dx}(-2) = \frac{2(1-(-2)^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{-6}{25} < 0$

By continuity:

Then $\frac{df}{dx} < 0$ on $(-\infty,-1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \searrow \text{ on } (-\infty,-1).}$

At $x=0$: $\frac{df}{dx}(0) = \frac{2(1-0^2)}{(1+0^2)^2} = 2 > 0$

By continuity:

Then $\frac{df}{dx} > 0$ on $(-1,1)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{f \nearrow \text{ on } (-1,1).}$

At $x=2$: $\frac{df}{dx}(2) = \frac{2(1-2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{-6}{25} < 0$

Then, By continuity,

$\frac{df}{dx} < 0$ on $(1,\infty)$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \searrow \text{ on } (1,\infty)}$

(g) By the info in (f)

$$f \searrow \qquad f \nearrow \qquad f \searrow$$

$$\xrightarrow{\quad -1 \qquad\qquad 1 \quad} x$$

$f(-1) =$ <u>local min.</u> $= 1 + \dfrac{2(-1)}{1+1^2} = 1 - \dfrac{2}{2} = 0$

$f(1) =$ <u>local max.</u> $= 1 + \dfrac{2(1)}{1+1^2} = 1 + \dfrac{2}{2} = 2.$

Now, since $f \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$,

$f(-1) = 0$ is a <u>global minimum</u>

$f(+1) = 2$ is a <u>global maximum</u>.

(h) We need to compute the 2^{nd} derivative

$$\frac{df}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f = 2\,\frac{(1+x^2)^2(1-x^2)' - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4}$$

$$= 2\left[\frac{(1+x^2)^2(1-x^2)' - (1-x^2)[(1+x^2)^2]'}{(1+x^2)^4}\right]$$

$$= 2\left\{\frac{(1+x^2)^2(-2x) - (1-x^2)2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}\right\}$$

$$= 2(-2x)(1+x^2)\left[\frac{(1+x^2) + 2(1-x^2)}{(1+x^2)^4}\right]$$

=(1=

I.e. $\frac{d^2f}{dx^2} = -4x(1+x^2)\left[\frac{3-x^2}{(1+x^2)^4}\right]$

$$\boxed{\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.}$$ It is a continuous function.

Observe that $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$ at $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ and $x_3 = \sqrt{3}$.

since $x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$

Now, take the intervals

$(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (0, +\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$.

Evaluate at:

(a) $\underline{x=-2}$ $\quad f''(-2) = \frac{4(-2)(4-3)}{(1+2^2)^3} = \frac{-8}{(1+2^2)^3} < 0$

By continuity $f'' < 0$ on $(-\infty, -\sqrt{3})$,

$\underline{f \text{ concave down on } (-\infty, -\sqrt{3})}$.

(b) $\underline{x=-1}$ $\quad f''(-1) = \frac{4(-1)(1-3)}{(1+1^2)^3} = \frac{(-4)(-2)}{(1+1^2)^3} = \frac{8}{(1+1^2)^3} > 0$

By continuity: $f'' > 0$ on $(-\sqrt{3}, 0)$

$\underline{f \text{ concave up on } (-\sqrt{3}, 0)}$

(γ) $\underline{x = 1}$ $f''(1) = \frac{4\cdot 1\,(1-3)}{(1+1^2)^3} = \frac{4(-2)}{(1+1^2)^3} = \frac{-8}{(1+1^2)^3} < 0$

By continuity: $f'' < 0$ on $(0, \sqrt{3})$

$\underline{f \text{ is concave down on } (0, \sqrt{3})}$

Finally:

(δ) $\underline{x = 2}$ $f''(2) = \frac{4\cdot 2\,(4-3)}{(1+2^2)^3} = \frac{8\cdot}{(1+2^2)^3} > 0$

By continuity: $f'' > 0$ on $(\sqrt{3}, \infty)$.

$\underline{f \text{ is concave up on } (\sqrt{3}, \infty)}$

(i) Since: * $f'' < 0$ to $f'' > 0$ at $x = -\sqrt{3}$

* $f'' > 0$ to $f'' < 0$ at $x = 0$

* $f'' < 0$ to $f'' > 0$ at $x = +\sqrt{3}$,

I.e., we have changes in concavity,

$\boxed{x = -\sqrt{3},\quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = +\sqrt{3}}$

are inflection points.

(j) We have to evaluate f'' at $x_1 = -1$

$x_2 = +1$.

$$f''(-1) = \frac{4(-1)((-1)^2 - 3)}{(1+(-1)^2)^3} = \frac{(-4)(1-3)}{(1+1)^3}$$

$$= \frac{8}{2^3} > 0$$

Then: $f''(-1) > 0$

$f'(-1) = 0$

$\Rightarrow$ $f(-1)$ local minimum

$$f''(1) = \frac{4(1)(1^2-3)}{(1+1^2)^3} = \frac{4(1-3)}{2^3} = \frac{4(-2)}{8}$$

$$= -\frac{8}{8} < 0$$

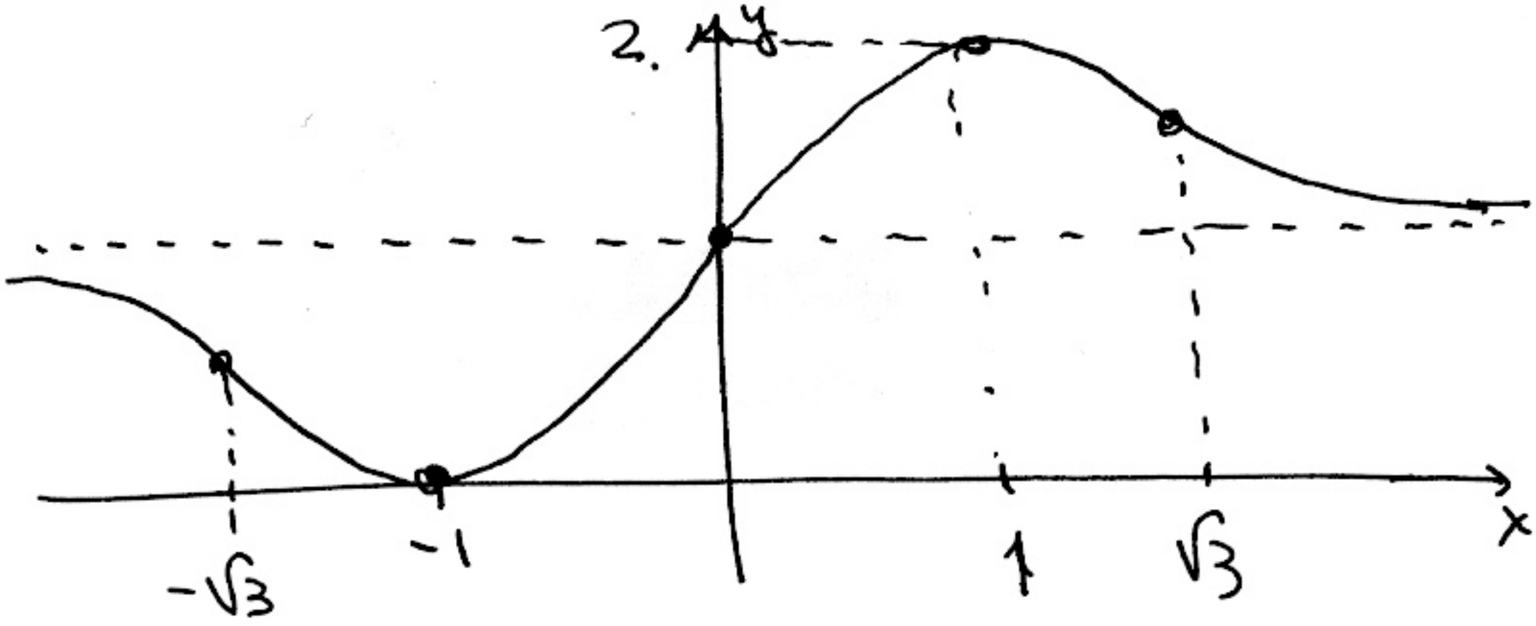
Then $f''(+1) < 0$

$f'(+1) = 0$

$\Rightarrow$ $f(+1)$ local maximum

This coincides with result in item (g).

We are now able to sketch the graph of the function:


2.
y
x
$-\sqrt{3}$
-1
1
$\sqrt{3}$