UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2022.

EXAMEN # 1. - A
FECHA: VIERNES 12 DE AGOSTO DE 2022. DE 16:00 A 17:30 HORAS.

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **SIETE** problemas con diferentes puntajes, para un total de **100 puntos.**
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) (**20 puntos.**) Resuelva la desigualdad:

$$\frac{x+2}{x-1} < \frac{x+3}{x-2}$$

(2) (**20 puntos.**) Resuelva la siguiente desigualdad:

$$-|x+5| < -5.$$

(3) (**20 puntos.**) En el círculo unitario, a un ángulo θ le corresponden las coordenadas $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. Calcule, geométricamente y analícamente:

(a) $\cos(\pi - \theta)$.
(b) $\sin(\pi + \theta)$.

(4) (**10 puntos.**) Evalúe la siguiente función como se indica.

$$f(x) = x^2 + 1. \quad \text{Encuentre:} \quad f(x+2) \quad \text{y} \quad f(x) + f(2).$$

¿Son iguales estas dos últimas funciones?

(5) (**10 puntos.**) Diga si la siguiente ecuación corresponde a un círculo, una parábola, una elipse o una hipérbola. Para determinar esto, ponga dicha ecuación en forma usual de estas figuras geométricas. Haga un bosquejo de la misma.

$$x^2 = 16 - 4y^2.$$

(6) (**10 puntos.**) Bosqueje la gráfica de la siguiente función. Diga en qué intervalos (aproximadamente) es creciente y decreciente.

$$f(x) = x^3 - 16x.$$

(7) (**10 puntos.**) Bosqueje la gráfica del polinomio:

$$P(x) = (x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)^4$$

(*) **FÓRMULAS.**

(a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
(b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$
(c) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
(d) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$
(e) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$

Examen #1: Answer Key

(1) We have to solve the inequality:

$$\frac{x+2}{x-1} < \frac{x+3}{x-2}$$

We rewrite as:

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x-2} < 0.$$

i.e. $$\frac{(x+2)(x-2) - (x+3)(x-1)}{(x-1)(x-2)} < 0$$

$(x+3)(x-1) = x^2+3x-x-3 = x^2+2x-3.$

$$\frac{(x^2-4) - (x^2+2x-3)}{(x-1)(x-2)} < 0$$

$$\frac{-4-2x+3}{(x-1)(x-2)} < 0$$

$$\frac{-2x-1}{(x-1)(x-2)} < 0$$

Or equivalently:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} > 0.$$

Numerator $=0$, if $2x-1=0$ i.e. $x=\frac{1}{2}$

Denominator $=0$, if $(x-1)(x-2)=0$ i.e., $x=1$ or $x=2$

We can make a table:

	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$2x-1$	<0	>0	>0	>0
$x-1$	<0	<0	>0	>0
$x-2$	<0	<0	<0	>0
$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$	<0	>0	<0	>0

Then, the solution set is:

$(\frac{1}{2},1)\cup(2,\infty)$

(2) Solve the inequality: $-|x+5| < -5$.

We can write it

$$5 < |x+5|.$$

We can solve it algebraically and geometrically:

Algebraically (a) If $x+5 \geq 0$: (ie $x \geq -5$, i.e., $x \in [-5, \infty)$)

Then.

$$5 < |x+5| \Rightarrow 5 < x+5 \Rightarrow 0 < x. \text{ ie } x \in (0, \infty)$$

Then, $[-5, \infty) \cap (0, \infty) = (0, \infty)$.

(b) If $x+5 < 0$ (ie. $x < -5$ ie $x \in (-\infty, -5)$)

$$5 < |x+5| \Rightarrow 5 < -(x+5) \Rightarrow 5 < -x-5$$

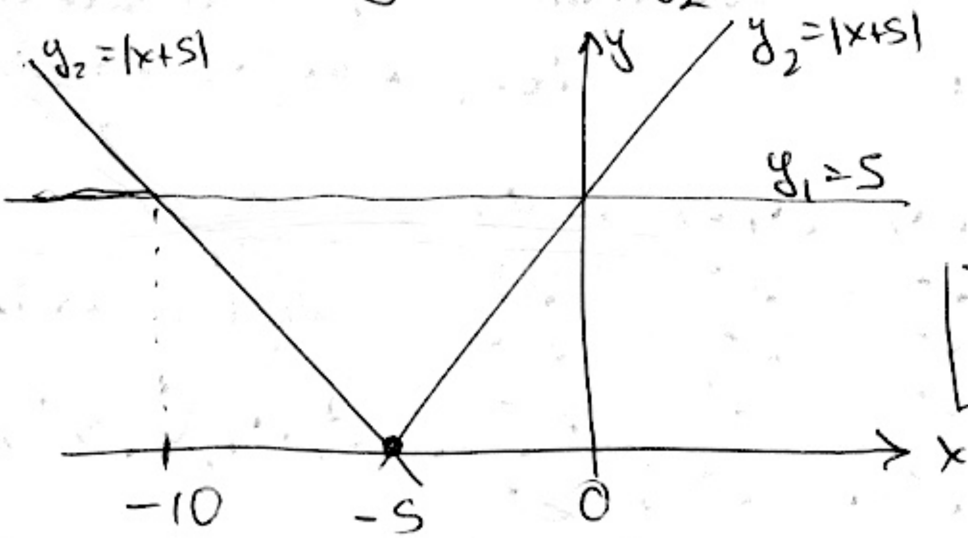
$$\Rightarrow x < -10 \Rightarrow x \in (-\infty, -10)$$

Then $(-\infty, -5) \cap (-\infty, -10) = (-\infty, -10)$.

Then, the solution set is; using (a) and (b).

$$\boxed{(-\infty, -10) \cup (0, \infty)}$$

Geometrically. Plot $y_2 = |x+5|$ and $y_1 = 5$.



Observe that

$$y_1 < y_2$$

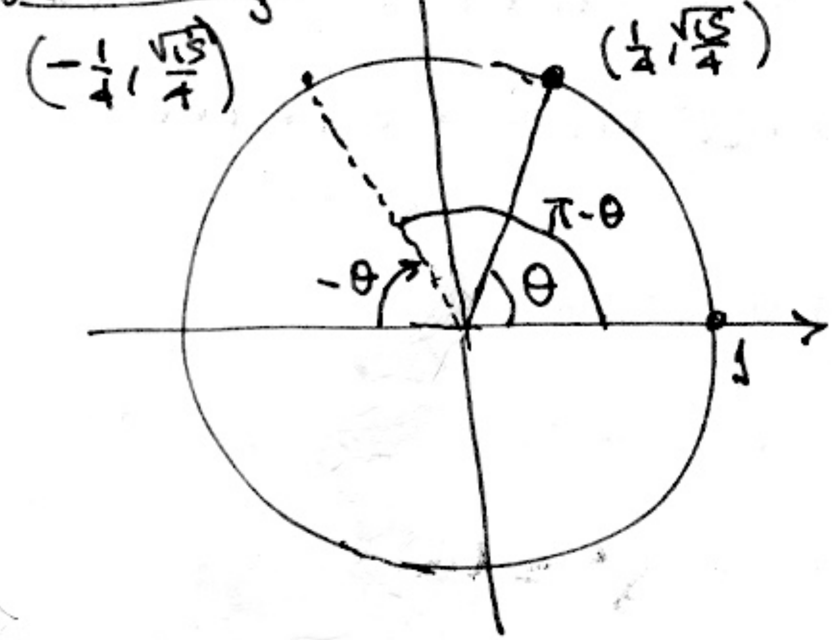
on the set:

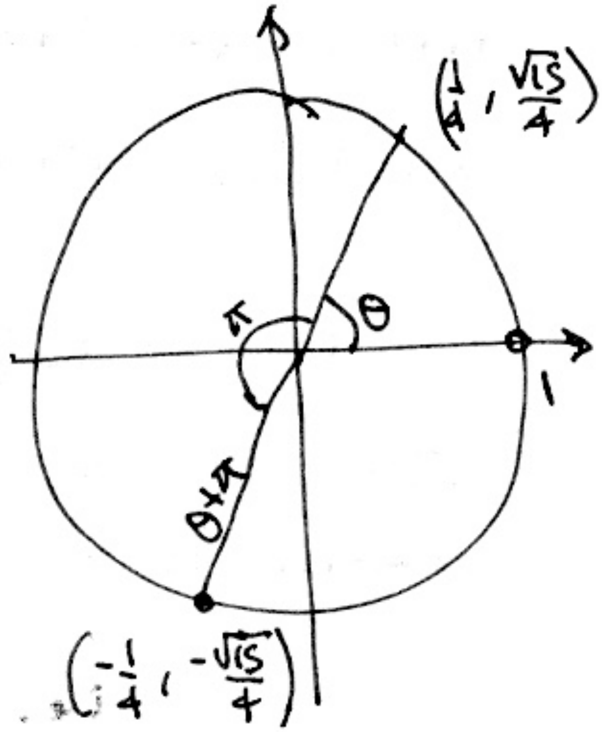
$$\boxed{(-\infty, -10) \cup (0, \infty)}$$

Same solution set.

③ We have $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

Geometrically:





(a) From the 1st figure:

$$\cos(\pi-\theta) = -\frac{1}{4}.$$

(b) From 2nd figure

$$\sin(\pi+\theta) = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Algebraically:

(a)
$$\begin{aligned}
\cos(\pi-\theta) &= \cos(\pi)\cos(-\theta) - \sin(\pi)\sin(-\theta) \\
&= \cos(\pi)\cos(\theta) - \sin(\pi)(-1)\sin(\theta) \\
&= \cos\pi\cos(\theta) + \sin(\pi)\sin\theta \\
&= (-1)\cos\theta + 0\cdot\sin\theta \\
&= (-1)\frac{1}{4} \checkmark
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\sin(\pi+\theta) &= \sin\pi\cos\theta + \cos(\pi)\sin\theta \\
&= 0\cdot\cos\theta + (-1)\sin\theta \\
&= -\frac{\sqrt{15}}{4} \checkmark
\end{aligned}$$

Same results.

④ Evaluar $f(x) = x^2+1$, como sigue:

$$f(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

$$f(x) + f(2) = (x^2+1) + (2^2+1) = x^2 + 1 + 4 + 1$$
$$= x^2 + 6.$$

No, they are not the same

---

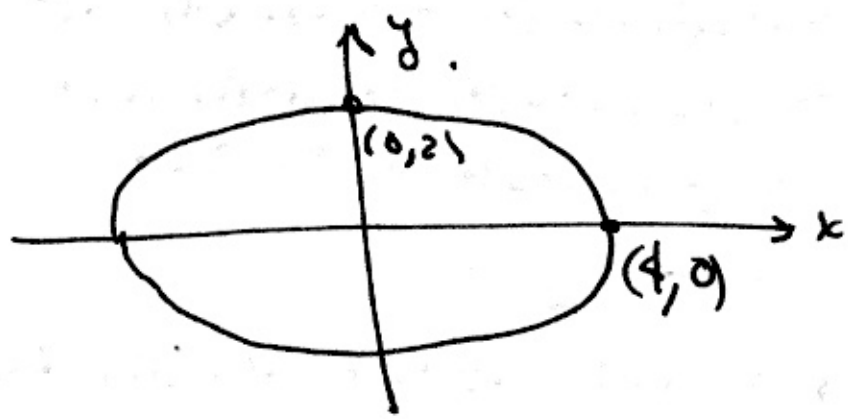
⑤. Take the equation $x^2 = 16 - 4y^2$, and re-write it as:

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

i.e. $$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

This is an ellipse with half axis $a=4$ and $b=2$:



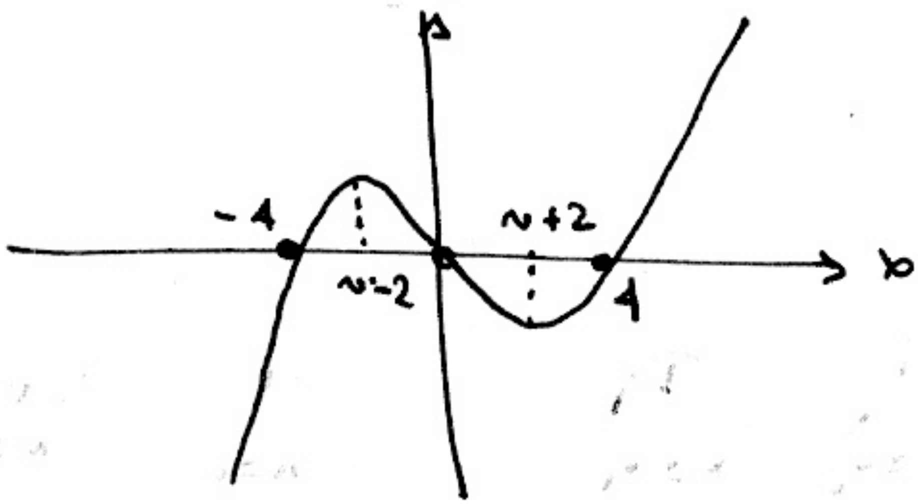
⑥ We have that $f(x) = x^3 - 16x$. has $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

We can factor it as:

$$f(x) = x(x^2 - 16)$$
$$= x(x-4)(x+4).$$

The zeros are $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$.

It is a cubic function, which is like an "S":



It is increasing in the intervals:

$$(-\infty, -2] \text{ and } [2, \infty)$$

and it is decreasing in:

$$[-2, 2].$$

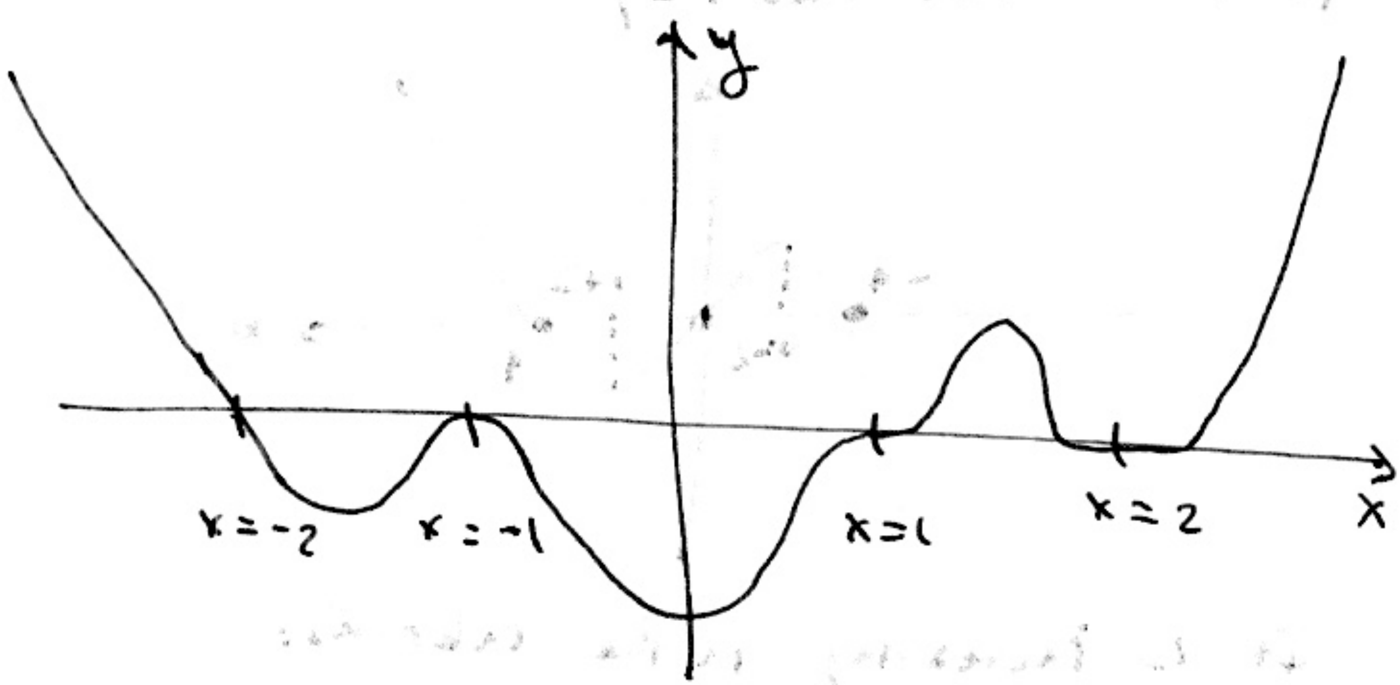
<u>Remark</u>: For the precise intervals, you need to know the concept of <u>Derivative</u>

You will learn this in <u>Differential Calculus</u>.

7 The polynomial $P(x) = (x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)^4$
has degree $1+2+3+4 = 10$. Then, opens up

Its zeros are $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

The behaviour near the zeroes looks like the corresponding power:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2022.

EXAMEN # 1. - B

FECHA: VIERNES 12 DE AGOSTO DE 2022. DE 16:00 A 17:30 HORAS.

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **SIETE** problemas con diferentes puntajes, para un total de **100 puntos**.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valores).
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) (**20 puntos.**) Resuelva la desigualdad:

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{x}$$

(2) (**20 puntos.**) Resuelva la siguiente desigualdad:

$$|x-2| \geq 2.$$

(3) (**20 puntos.**)

Calcule $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Para ello haga lo siguiente:

(a) Observe que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. Multiplique esta cantidad por π.

(b) Después use alguna identidad trigonométrica para simplificar.

(c) Finalmente, use los cosenos y senos de ángulos conocidos como los vistos en clase.

(4) (**10 puntos.**) Evalúe la siguiente función como se indica.

$$g(x) = x + 2. \quad \text{Encuentre:} \quad g(x^2) \quad \text{y} \quad (g(x))^2.$$

¿Son iguales estas dos últimas funciones?

(5) (**10 puntos.**) Diga si la siguiente ecuación corresponde a un círculo, una parábola, una elipse o una hipérbola. Para determinar esto, ponga dicha ecuación en forma usual de estas figuras geométricas. Haga un bosquejo de la misma.

$$x^2 = 4 + 4y^2.$$

(6) (**10 puntos.**) Bosqueje la gráfica de la siguiente función. Diga en qué intervalos (aproximadamente) es creciente y decreciente.

$$g(x) = -(x^3 - 25x).$$

(7) (**10 puntos.**) Bosqueje la gráfica del polinomio:

$$Q(x) = (x+2)^4(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$$

(*) **FÓRMULAS.**

(a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

(b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$

(c) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(d) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

(e) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$

UAM-Azcapotzalco Introducción al Cálculo | Viernes, Agosto 12, 2022

Examen #1. Answer Key

(1) Let us rewrite the inequality:

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{x}$$

as follows:

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{x+6}{6x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x+6}{6x} \geq 0$$

$$\frac{6x - (x+6)(x-1)}{(x-1)6x} \geq 0.$$

$$\frac{6x - (x^2+5x-6)}{6x(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+x+6}{6x(x-1)} \geq 0$$

$$-\frac{(x^2-x-6)}{6x(x-1)} \geq 0.$$

$$-\frac{(x-3)(x+2)}{6x(x-1)} \geq 0$$

Numerator $= 0$, if $x=-2$, $x=3$

Denominator $= 0$ if $x=0$, $x=1$.

This defines the intervals $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(3,\infty)$

Make a table

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$-(x-3)$	>0	>0	>0	>0	<0
$x+2$	<0	>0	>0	>0	>0
x	<0	<0	>0	>0	>0
$x-1$	<0	<0	<0	>0	>0
Fraction	<0	>0	<0	>0	<0

Then, Solution set $[-2,0) \cup (1,3]$ — $x=0$ and $x=1$ are not included since Den $=0$

② We can solve the inequality

$$|x-2| \geq 2$$

Algebraically and geometrically:

Algebraically: (a) If $x-2 \geq 0$ (ie $x \geq +2$, i.e. $x \in [2,\infty)$)

then $|x-2| \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 2$

$\Rightarrow x \geq 4$

$\Rightarrow x \in [4,\infty)$.

Solution: $[2,\infty) \cap [4,\infty) = [4,\infty)$

(b) If $x-2<0$ (i.e., $x<2$, ie $x \in (-\infty,2)$)

then $|x-2| \geq 2 \Rightarrow -(x-2) \geq 2$.

$\Rightarrow -x+2 \geq 2$

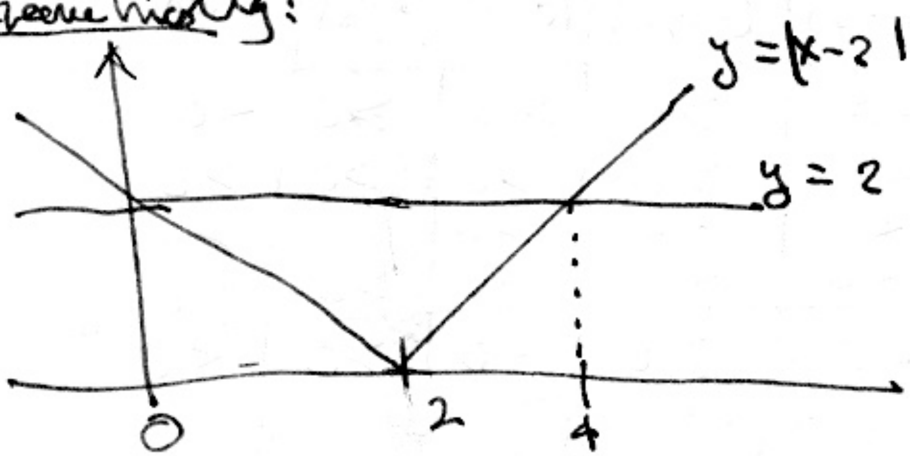
$\Rightarrow -x \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,0]$

Solution: $(-\infty,2) \cap (-\infty,0] = (-\infty,0]$.

$\boxed{\text{Solution set is then } (-\infty,0] \cup [4,\infty).}$

Geometrically:



$|x-2| \geq 2$ is the set

$\boxed{(-\infty,0] \cup [4,\infty)}$

Same solution.

③ We are required to compute $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

We have $\frac{\pi}{12} = \pi \frac{1}{12} = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Then...

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Using $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

and using known angles

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}}$$

4. We have the function

$$g(x) = x+2.$$

We have:

$$g(x^2) = (x^2) + 2 = x^2+2$$

and $$(g(x))^2 = (x+2)^2 = x^2+2x+4.$$

No, they are <u>not</u> the same function

---

5. We re-write the equation.

$$x^2 = 4 + 4y^2.$$

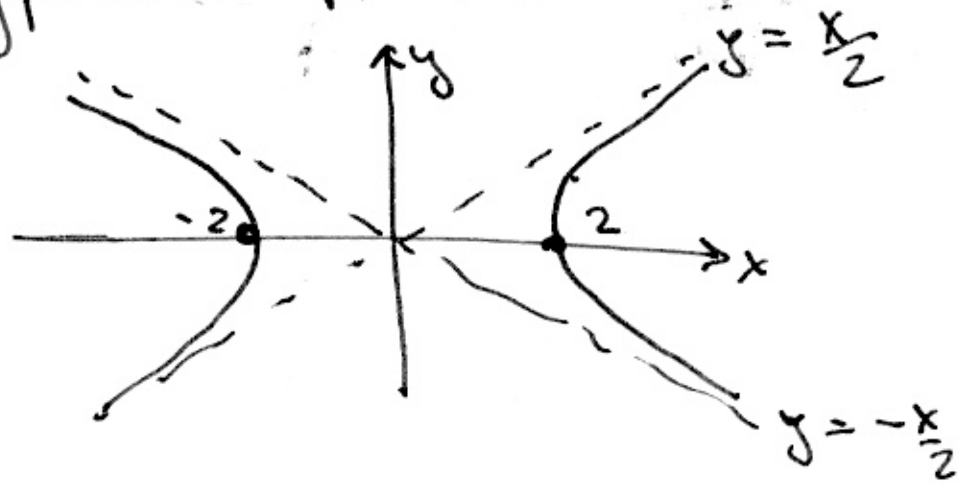
i.e.: $$x^2 - 4y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$ This is a hyperbola.

If $y=0$, i.e., x-intersections are: $\frac{x^2}{4} = 1$

$\frac{x^2}{4} - 1 = 0$; $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right) = 0 \Rightarrow x=2,\ x=-2.$

The hyperbola opens to the left and right



⑥ The function $g(x) = -(x^3 - 25x)$ has $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

The roots of $g(x) = 0$ are given by:

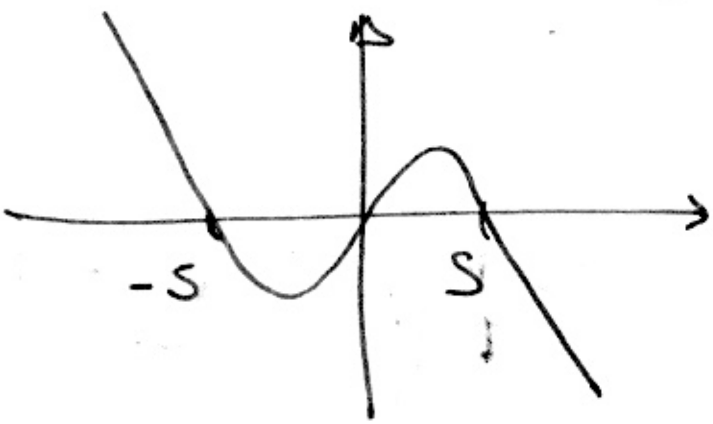
$$g(x) = -(x^3 - 25x) = 0$$

i.e.

$$g(x) = x(x^2 - 25) = x(x-5)(x+5) = 0$$

The roots are. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$.

This is a cubic polynomial. It is "S" shaped



It is <u>increasing</u>, approximately, on

$$[-2.5; 2.5]$$

and decreasing in

$$(-\infty, -2.5] \text{ and } [2.5, \infty)$$

⑦. The polynomial $p(x) = (x+2)^4(x+1)^3(x-1)^2(x-1)$

has degree $4+3+2+1 = 10$.

It opens upwards.

The behaviour near its roots is given by the corresponding power.