**UAM - AZCAPOTZALCO. CÁLCULO INTEGRAL. TRIM: OTOÑO DE 2022.**

**EXAMEN # 1. VIERNES 18 DE NOVIEMBRE DE 2022: 16:00-17:30**

**Nombre:** Answer Key.

**Instrucciones:**

- El examen consta de **CUATRO** problemas con diferentes puntajes, para un total de **100 puntos** y un problema **extra de 10 puntos**.
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valorescomo en problemas de física o de aplicación.)
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

## PROBLEMAS

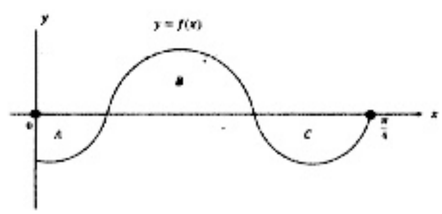
(1) Calcule la derivada de las siguientes funciones. (*Hint:* Dos de estas integrales son inmediatas y no requieren hacer cuentas).

(a) **(20 puntos.)** $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{1+x^2} (t^3 - t^4)\sin^2 t \, dt.$

(b) **(10 puntos.)** $g(x) = \displaystyle\int_{-\cos x}^{-\cos x} \frac{\ln(1+t^2)}{e^{-t^2} + t^4} \, dt.$

(c) **(10 puntos.)** $h(x) = \displaystyle\int_{-e^{x^2}}^{e^{x^2}} \frac{\sqrt[3]{t^3 + t^7}}{1 + t^2} \, dt.$

(2) **(20 puntos.)** Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (3f(x) + 1 + \tan^2 x) \, dx + \int_0^{\pi} 10 \sin x \, dx$, en donde la gráfica de $f$ está dada en la figura y las regiones A, B y C tienen áreas 2, 4 y 5, respectivamente. (*Hint:* recuerde $\tan(\pi/4) = 1$.)




(3) **(20 puntos.)** Escriba el límite de la siguiente suma de Riemann como integral definida. Posteriormente, evalúe la integral usando el Teorema Fundamental del Cálculo. (*Hint:* recuerde $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \left( \sec\left(k\frac{\pi}{4n}\right) \tan\left(k\frac{\pi}{4n}\right) \right)$$

(4) **(20 puntos.)** (a) Usando una partición de 4 sub-intervalos, aproxime la siguiente integral usando una suma de Riemann usando puntos izquierdos.

$$\int_{-4}^{0} 1 + x^2 \, dx$$

¿La aproximación es una sobreestimación o subestimación? Haga un dibujo para responder a esta pregunta.

(b) Ahora evalúe la integral usando el Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Sigue siendo sobro- o sub-estimación?

(5) **(10 puntos.)** Una partícula siente una aceleración $a(t) = 2t$. Las unidades son segundos [s] (en tiempo) y metros [m] (en distancia.)

(a) Encuentre la velocidad como función del tiempo $t$, si la velocidad inicial es $v(0) = -4$ m/s.

(b) Encuentre la **distancia** total recorrida desde $t = 0$ y hasta $t = 4$.

UAM-Azcapotzalco. Cálculo Integral | Viernes, Noviembre 18, 2022

Examen #1  Answer Key

1 (a) $\frac{d}{dx}\int_x^{1+x^2} (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt = \frac{d}{dx}\left[\int_x^0 (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt + \int_0^{1+x^2} (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt\right]$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt + \int_0^{1+x^2} (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_0^x (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt + \frac{d}{du}\left[\int_0^u (t^3-t^4)\sin^2 t\, dt\right]\frac{du}{dt}$$

where $u = u(x) = 1+x^2$, and by the chain rule.

Now, by the Fundamental Theorem of Calculus

$$= -(x^3-x^4)\sin^2 x + (u^3-u^4)\sin^2 u\,\frac{du}{dx}$$

Going back to the $x$ variable: $u = 1+x^2$:

$$= -(x^3-x^4)\sin^2 x + 2x\left[(1+x^2)^3-(1+x^2)^4\right]\sin^2(1+x^2)$$

1 b) The integral $\int_{-\cos x}^{-\cos x} \frac{\mathrm{Log}(1+t^2)}{e^{-t^2}+t^4}\, dt = 0$, since the limits of integration, upper and lower, coincide.

Then $\frac{d}{dx}\left(\int_{-\cos x}^{-\cos x} \frac{\log(1+t^2)}{e^{-t^2}+t^4}\, dt\right) = 0.$

1 c). The integral $\int_{-e^{x^2}}^{e^{x^2}} \frac{\sqrt[3]{t^3+t^7}}{1+t^2}\, dt = 0$, since the integrand is an odd function $= 1 -$ Then $\frac{d}{dx}\left(\int_{-e^{x^2}}^{e^{x^2}} \frac{\sqrt[3]{t^3+t^7}}{1+t^2}\, dt\right) = 0$

(2) $$\int_0^{\pi/4} 3f(x) + (1+\tan^2 x)\,dx + \int_0^{\pi} 10 \sin x\,dx =$$

$$= 3\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)\,dx + 10\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$$

by the geometry of integrals and the Fundamental Theorem of Calculus:

$$= 3\left(-2+4-5\right) + \tan x \Big|_0^{\pi/4} + 10\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 3(-3) + \tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \tan 0 + 10\left((-\cos\pi) - (-\cos 0)\right)$$

$$= -9 + 1 - 0 + 10\left((+1) + (1)\right) = -9 + 1 + 20$$

$$= 12$$

---

(3) Find $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n}\left(\sec\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right).$

From here: $x_k = \frac{k\pi}{4n}$, but $x_k = a + k\Delta x$.

Comparing: $a = 0$ and $\Delta x = \frac{\pi}{4n}$.

Since $\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{\pi}{4n} = \frac{b-a}{n} = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}.$

$\Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \sec\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$
$a = 0$ $= 2 >$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \sec(x_k)\tan(x_k) = \int_0^{\pi/4} \sec x \tan x \, dx$$

by the Fundamental Theorem

$$= \sec x \Big|_0^{\pi/4} = \sec(\pi/4) - \sec(0) = \frac{1}{\cos(\pi/4)} - \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}/2)} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

---

(4) · Here, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0-(-4)}{n} = \frac{4}{n}$.

Since $n = 4 \Rightarrow \Delta x = 1$. The points are

$$x_0 = -4,\ x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0.$$

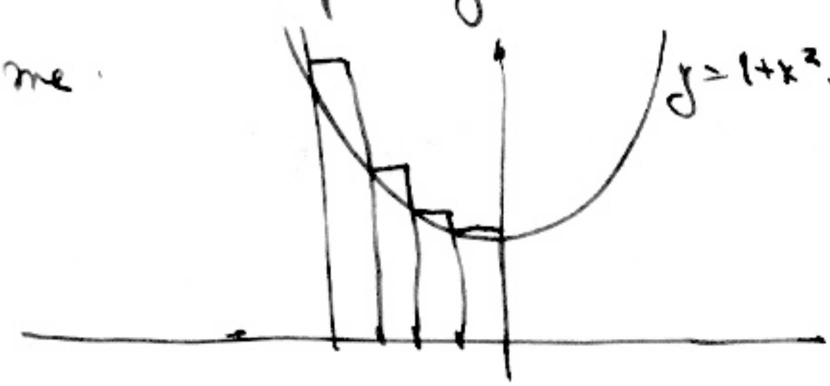
Using left point, we require $x_0, x_1, x_2, x_3$.

Then $\sum_{k=1}^{4} f(x_k)\Delta x = f(x_0)\cdot 1 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2) + f(x_3)\cdot 1$

$$= (1+x_0^2) + (1+x_1^2) + (1+x_2^2) + (1+x_3^2).$$

$$= (1+16) + (1+9) + (1+4) + (1+1) = \boxed{34}$$

We are computing the area of the rectangles, they are:




So, we are overestimating.

Now $\int_{-4}^{0} 1+x^2\,dx = x+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-4}^{0} = 0-\left((-4)+\frac{1}{3}(-4)^3\right)$

$= 4+\frac{1}{3}64 = \frac{12+64}{3} = \frac{76}{3} = 25+\frac{1}{3}. < 34$

This confirms we are over-estimating with the

Riemann sums

---

(5) (a) Since $\frac{dv}{dt} = a(t) = 2t$, the antiderivative on both sides, implies $v(t)$ $t^2+C$. Since $v(0)=-4$

Then, $-4 = 0+C \Rightarrow v(t) = t^2-4$.

(b). Now, $v(t)=0$ when $t^2-4=0 \Rightarrow t_1 = +2$ or $t_2=-2$.

Then traveled distance is: $D = \int^{4} |v(t)|\,dt =$

$= \int_0^2 |v(t)|\,dt + \int_2^4 |v(t)|\,dt = \int_0^2 -v(t)\,dt + \int_2^4 v(t)\,dt$

Since $v(t)<0$ on $[0,2]$ and $v(t)>0$ on $[2,4]$.

$= \int_0^2 4-t^2\,dt + \int_2^4 t^2-4\,dt = \left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{t^3}{3}-4t\right)\Big|_2^4$

$= \left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-(0) + \left(\frac{4^3}{3}-4\cdot 4^2\right) = \left(8-\frac{8}{3}\right)+\left(\frac{64}{3}-64\right) =$

$= 8\left(1-\frac{1}{3}\right)+64\left(\frac{1}{3}-1\right) = (8-64)\left(1-\frac{1}{3}\right) = (-56)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{112}{3}\,m$

$\approx 34.\overline{3}\,m$