UAM - AZCAPOTZALCO. CÁLCULO INTEGRAL.
TRIM: OTOÑO DE 2022.
EXAMEN # 3.
VIERNES 13 DE DICIEMBRE DE 2023: 16:00-17:30

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 15 puntos cada uno. Esta parte vale **60 puntos.** La parte de tarea-examen vale **40 puntos.**
- Tiene una (1) hora y treinta (30) minutos para resolver este examen.
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valorescomo en problemas de física o de aplicación.)
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

ANSWER KEY.

PROBLEMAS

(1) **(15 puntos.)** De la forma de las fracciones parciales de la siguiente función racional. En este problema sea cuidadoso con el Álgebra:

$$\frac{2x^2+3x+5}{(x^2+2x+1)(x^2+2x+9)^2(x^2+5x+6)(x^2-9)^2}$$

(2) **(15 puntos.)** Calcule la integral:

$$\int_{e/2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln 2x)^3}\,dx$$

(3) **(15 puntos.)** Escriba una integral que describa la longitud de arco de la gráfica de la función $f(x) = \cos 2x$ sobre un periodo.

(4) **(15 puntos.)** Usted tiene un resorte de 125 cm (su longitud natural.) Para que la longitud del resorte sea de 140 cm, usted debe aplicar una fuerza de 45 Newtons.

(a) ¿Qué energía necesita para estirar el resorte de 140 a 155 ~~Newtons~~? cm

(b) ¿Y cuál el trabajo necesario para estirarlo de 125 a 140 cm?

(c) ¿Es el mismo resultado del inciso (a) que el del (b) por ser 15 cm de estiramiento? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

UAM-AZCAPOTZALCO | CÁLCULO INTEGRAL | V. 13 de enero 2023

Examen #3. ANSWER KEY

---

(1) Let us write the rational function on its simple terms. To do this, we expand the denominator and group some factors.

$$\frac{2x^2+3x+5}{\underbrace{(x^2+2x+1)}(x^2+2x+9)^2\underbrace{(x^2+5x+6)}(x^2-9)^2} =$$

Observe that: $x^2+2x+9 = x^2+2x+1+8 = (x+1)^2+8$

Then:

$$= \frac{2x^2+3x+5}{\underbrace{(x+1)^2}((x+1)^2+8)^2\underbrace{(x+2)(x+3)}[(x-3)(x+3)]^2} =$$

$$= \frac{2x^2+3x+5}{(x+1)^2((x+1)^2+8)^2(x+2)(x+3)^3(x-3)^2} =$$

and its partial fractions are

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2+8} + \frac{Ex+F}{((x+1)^2+8)^2} + \frac{G}{x+2} +$$

$$+ \frac{H}{x+3} + \frac{J}{(x+3)^2} + \frac{K}{(x+3)^3} + \frac{L}{(x-3)} + \frac{M}{(x-3)^2}$$

where $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L$ are constants to be determined

---

$=$

(2) This is an improper integral

$$\int_{e/2}^{\infty} \frac{1}{x(\log 2x)^3}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_{e/2}^{M} \frac{1}{x(\log 2x)^3}\,dx.$$

Let $y = \log 2x$; Then $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}\,2 = \frac{1}{x}$.

If $x = M \Rightarrow y = \log 2M$.

$x = \frac{e}{2} \Rightarrow y = \log\left(2\frac{e}{2}\right) = \log e = 1.$

Hence, by the substitution rule.

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{e/2\ 1}^{M\ \log 2M} \frac{dy}{dx}\frac{1}{(y)^3}\,dx$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{1}^{\log(2M)} \frac{1}{y^3}\,dy = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{y^2}\right)\Big|_{1}^{\log(2M)}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\log 2M)^2} + \frac{1}{2}\right)$$

Since $\log(2M) \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$, $\frac{1}{\log 2M} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$.

$= 0 + \frac{1}{2}$. Hence.

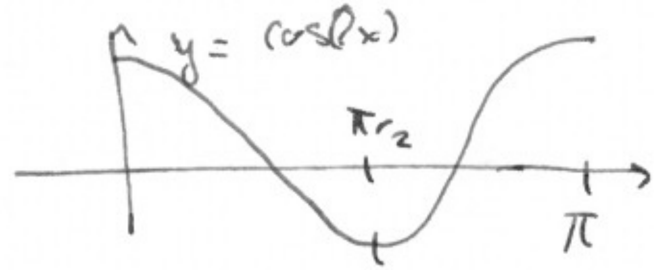
$$\boxed{\int_{e/2}^{\infty} \frac{1}{x(\log 2x)^3}\,dx = \frac{1}{2}}$$

③ To find the period, T, of $f(x) = \cos(2x)$, we need $\cos(2T) = \cos(2\pi) \Rightarrow 2T = 2\pi$.

$\Rightarrow T = \pi$ is the period.

Now: $f'(x) = -2\sin 2x$

and the arclength of, is given by



$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^\pi \sqrt{1+(-2\sin 2x)^2}\,dx.$$

$$\boxed{\ell = \int_0^\pi \sqrt{1+4\sin^2 2x}\,dx}$$

(4) The spring has a natural length $\ell = 1.25\,m$. We apply to it a force of $45\,N$, to get the spring at $\ell + \Delta\ell = 1.40\,m$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ell = 1.4\,m - \ell = 1.4\,m - 1.25\,m = 0.15\,m.$$

Hooke's law $\quad F = k\,\Delta\ell \quad \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{45}{0.15}\frac{N}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 300\,\frac{N}{m}}$$

(a), Now to stretch from 1.40 m to, 1.55 m, being 1.25 m the equilibrium position, then initial and final positions are
$$x_1 = 1.4 - 1.25 = 0.15\,m$$
$$x_2 = 1.55 - 1.25 = 0.3\,m$$

Hence, the work done is:

$$W_1 = \int_{0.15}^{0.30} F(x)\,dx = \int_{0.15}^{0.30} k\,x\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_{0.15}^{0.30}$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{30}{100}\right)^2 - \left(\frac{15}{100}\right)^2\right] = \frac{1}{2}k\left[\frac{900 - 225}{10^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}300\left[\frac{675}{10^4}\right] = 10.125 \text{ Joules}$$

(b) $x_1 = 1.25 - 1.25 = 0\,m$
$x_2 = 1.4 - 1.25 = 0.15\,m$

$$W = \frac{1}{2}k\,x^2\Big|_0^{0.15} = \frac{300}{2}(0.15$$

$$= 150\left(\frac{15}{100}\right)^2 = 3.375 \text{ Joules}$$

(c) Los resultados son diferentes, pues F no es constante, a pesar de que las distancias son las mismas.

UAM - AZCAPOTZALCO. CÁLCULO INTEGRAL.
TRIM: OTOÑO DE 2022.
EXAMEN # 3. TAREA-EXAMEN
VIERNES 13 DE DICIEMBRE DE 2023.
ENTREGAR ANTES DE LAS 23:59 HORAS

Nombre: ANSWED KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de **CUATRO** problemas de 10 puntos cada uno. Esta parte vale **40 puntos.** La parte del examen en el salón vale **40 puntos.**
- El examen es **INDIVIDUAL** y se resuelve de forma **INDIVIDUAL**. Está prohibido recibir ayuda de terceras personas o usar recursos no especificados.
- Si salen fracciones o raíces, NO las convierta a decimales con su calculadora. Déjelas indicadas (a menos que vaya a estimar valorescomo en problemas de física o de aplicación.)
- **Para recibir puntaje**: Conteste correctamente. Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE y muestre todas sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

Entregar por *Google Classroom* **hoy viernes 13 de enero** antes de las **23:59 horas**.

(1) **(10 puntos.)** Calcule la antiderivada de la siguiente función:

$$\frac{x}{4x^2 + 7x - 2}$$

(2) **(10 puntos.)** Calcule la integral:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 6x + 5} dx$$

(3) **(10 puntos.)** Calcule el volumen de la región limitada por las siguientes curvas

$$y = 8x^3, \quad y = 2x, \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$

al hacerla rotar alrededor de la recta $y = 0$.

(4) **(10 puntos.)** Una cadena de 100 metros de largo tiene una masa de 80 kg. De esos 100 metros, 25 m descansan ya sobre la azotea y el resto cuelga del edificio. Calcule el trabajo necesario para subir el resto de la cadena a la azotea.

Examen #3 TAREA-EXAMEN

① We need to separate into partial fractions.

$$\frac{x}{4x^2+7x-2} = \frac{x}{(4x-1)(x+2)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{x+2}:$$

$(4x-2)(x+1) = 4x^2+4x-2x-2$, NO.

$(4x+2)(x-1) = 4x^2-4x+2x-2$, NO

$(4x-1)(x+2) = 4x^2+8x-x-2$, Sí

$$= \frac{A(x+2) + B(4x-1)}{(4x-1)(x+2)} \quad \text{Then} \quad \boxed{x = A(x+2) + B(4x-1)}$$

Set $x=\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = A\left(\frac{1}{4}+2\right) + B\left(4\cdot\frac{1}{4}-1\right)$$

$$\frac{1}{4} = A\frac{(1+8)}{4}+0 \Rightarrow \quad 1 = 9A \quad \boxed{A=\frac{1}{9}}$$

Set $x=-2$:

$$-2 = A(-2+2) + B(4(-2)-1)$$

$$-2 = B(-9) \Rightarrow \boxed{B = \frac{2}{9}}$$

Hence, the anti-derivative is

$$\int \frac{x}{4x^2+7-2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{4x-1}\,dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{1}{4}\,\mathrm{Log}|4x-1| + \frac{2}{9}\,\mathrm{Log}|x+2| + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{9}\,\mathrm{Log}\left((4x-1)^{1/4}(x+2)^2\right) + C}$$

② We need to compute: $\int_0^3 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$.

Observe that $x^2-6x+5 = (x-5)(x-1)$

So $x=1 \notin \mathrm{Dom}\left(\frac{1}{x^2-6x+5}\right)$.

We have a vertical asymptote at $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-5)(x-1)} = -\infty.$$

since ⊙ $= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-5}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-5}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$

$= \left(-\frac{1}{4}\right)(\infty) = -\infty.$

Similarly, $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-5)(x-1)} = +\infty.$

So:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_0^{1-a}\frac{1}{x^2-6x+5}\,dx + \lim_{b\to 0^+}\int_{1+b}^{3}\frac{dx}{x^2-6x+5}$$

We need the antiderivative:

$\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$, so, we need the partial fractions of the integrand.

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-5)}{(x-5)(x-1)}.$$

$=6=$

Hence $1 = A(x-1) + B(x-5)$

At $\underline{x=5:}$ $1 = A(5-1) + 0 \Rightarrow 1 = A4 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$

At $\underline{x=1:}$ $1 = 0 + B(1-5) \Rightarrow 1 = -4B$ $B = -\frac{1}{4}$

Hence:

$$\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-5| - \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-1|.$$

Now

$$\lim_{a\to 0^+} \int_0^{1-a} \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-5| - \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-1|\right)\Big|_0^{1-a}$$

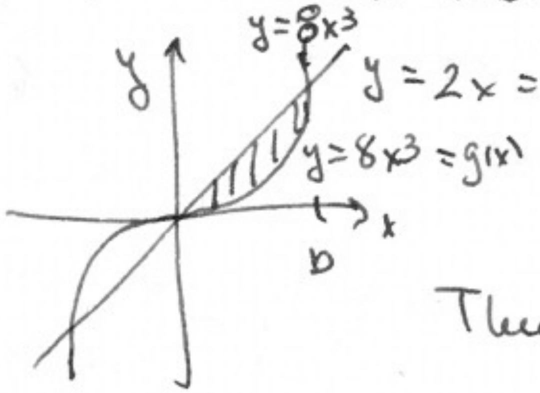
$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{4}\log|1-a-5| - \frac{1}{4}\log|1-a-1| - \frac{1}{4}\log|-5| + \frac{1}{4}\log|-1|\right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{Log}|4+a|}{4} - \frac{1}{4}\log|a| - \frac{1}{4}\log 5 + 0\right)$$

$= -\infty$. Then, the $\underline{\text{integral}}$ $\underline{\text{diverges}}$ and do $\underline{\underline{\text{not}}}$ exists:

$$\boxed{\int_0^3 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx \text{ does } \underline{\underline{\text{not}}} \text{ exist.}}$$

③ We have to find the intersection:



$8x^3 = 2x$

$\Rightarrow \; 2(4x^2-1)x = 0.$

Then $4x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

and $x=0$

But $x\geq 0$. Thus, $x=0$ and $x=\frac{1}{2}$ are the intersection.

The exterior radius $r_{ext} = f(x) = 2x$

and interior radius $r_{int} = g(x) = 8x^3$.

Then, the volume is

$$V = \pi\int_0^b r_{ext}^2 - r_{int}^2\,dx = \pi\int_0^{1/2} (f(x))^2 - (g(x))^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{1/2} (2x)^2 - (8x^3)^2\,dx = \pi\int_0^{1/2} 4x^2 - 64x^6\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{64}{7}x^7\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = 4\pi x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{16}{7}x^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\pi\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{16}{7}\frac{1}{2^4}\right) = \frac{4\pi}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{7-3}{21}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{4}{21} = \frac{2\pi}{21}$$

$$\boxed{V = \frac{2\pi}{21}}$$

=8=

(4) The chain density is: $\rho_w = \frac{80\ kg}{100\ m} = 0.8\ \frac{kg}{m}$.

Now, if we have x meters hanging from the building, the force to keep the chain hanging is its own weight:

$$F(x) = (\overbrace{\rho_w x}^{\text{mass}})\ \overset{\text{acceleration}}{g} = \rho_w g x$$

and it is a linear function of x.

Then, the work to get all the hanging chain, with length 75m is:

$$W = \int_0^{75} F(x)\,dx = \rho_w g \int_0^{75} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_w g x^2 \Big|_0^{75} = \frac{1}{2}\left(0.8\ \frac{kg}{m}\right)\left(9.8\ \frac{m}{sec^2}\right)(75\ m)^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.8)(9.8)(75)^2\ \frac{kg\ m^3}{m\ sec^2} = 22\,050\ kg\frac{m^2}{sec^2}\ \text{(Joul}$$